

半拉格朗日平流内在耗散的定量分析

John D. McCalpin

摘要 因在估计每一空气微团的出发点上的流场值时运用了插值方法,所以,半拉格朗日平流方案是耗散的。本文用一、二、三、四次精度的拉格朗日插值方案的放大因子计算了耗散衰减的时间尺度,以及产生的有效涡动粘滞系数(为波长和 Courant 余数的函数)。然后把半拉格朗日平流方案的内在耗散同许多传统的耗散形式(如拉普拉斯或双谐波涡动粘滞)作了比较。着重说明了半拉格朗日平流和许多传统的欧拉技术的一致性。还利用所选择的严谨参数是符合守恒规则的观点,讨论了耗散对时间步长和格距的依赖关系。

1. 前言

在对大气运动方程进行积分的更为有效的诸技术的调研中,发现近年来有许多人都在运用所谓的半拉格朗日平流方案进行试验。此方案的基本原理是利用流场在沿着质点的轨迹追溯上游位置,再利用内插来更新固定格点上的值。这与在每一时间步长跟踪不同空气微团的纯拉格朗日方案是不一样的。当插值所用的格点最接近空气微团的出发点(不是到达点)时,此方案称为“多重迎风”方案。多重迎风方案的平流是无条件稳定的。

对半拉格朗日平流的计算有许多方法。有的使用了分裂算法(Bates 和 McDonald, 1982; Bates, 1984),在这个方法中把方程分为纯平流和线性张弛两项,分别进行积分。平流项的时间步长由精度决定,而不依赖于稳定性判据。计算平流项时,可把非平流项移至方程右边后沿轨迹进行一步积分计算(Robert 等,1985; McDonald, 1986)。上述即是对纯平流方案的简单分析。

McDonald (1984,1987) 曾讨论了使用拉格朗日插值方法的半拉格朗日平流的精度。他和其他人已注意到了其中的耗散(见 Bates, 1984; Robert 等, 1985; Ritchie, 1988),

但没有用较一般的粘滞性量度方法,加以定量确定。本研究中,将利用耗散衰减的时间尺度和作为水平尺度与 Courant 余数为函数的有效涡动粘滞系数来定量讨论半拉格朗日平流的内在耗散。

2. 放大因子

McDonald (1984) 计算了使用拉格朗日插值的平面波的半拉格朗日平流的放大因子。为使分析更为简单,拉格朗日插值的放大因子分为 x 和 y 两个分量。因我们这里只关心振幅(不是位相),因此只研究放大因子的值就足够了。根据 McDonald, 插值点是这样选择的: Courant 数的小数部分在双线性性和双三次插值时为 $0 \sim 1$ 之间,而在双二次和双四次插值时为 $-\frac{1}{2} \sim \frac{1}{2}$ 之间。今后, Courant 数的小数部分由 α 表示,称之为“Courant 余数”。根据定义 $c = 1 - \cos(k\Delta x)$, 因此,四种插值的放大因子值为:

$$\left. \begin{aligned} |\lambda_1|^2 &= 1 - 2\alpha(1-\alpha)c \\ |\lambda_2|^2 &= 1 - \alpha^2(1-\alpha^2)c^2 \\ |\lambda_3|^2 &= 1 - \alpha(2-\alpha)(1-\alpha^2)c^2 \\ &\quad \times [3 + 2c\alpha(1-\alpha)]/9 \\ |\lambda_4|^2 &= 1 - \alpha^2(1-\alpha^2)(4-\alpha^2)c^3 \\ &\quad \times [4 + c(1-\alpha^2)]/36 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

这里, α 为 Courant 余数, k 为波数, Δt 和 Δx 分别为常用的有限差分时间步长和空间格距。下标为上述四种插值的次数。

不用说, 插值方法不仅仅是上述那些方法。样条插值具有一些比拉格朗日插值更为优越的性质, 也已被用于半拉格朗日平流方案中去了 (Purnell, 1976; Pudykiewicz 和 Staniforth, 1984)。在风暴潮模拟中, 还研究了低阶平面三角插值在半拉格朗日平流中的应用 (R. O. Reid, 私人通讯)。因此, 那些特殊方法的细节可能与这里描述的结果不同, 但各种插值技术精度的量级是相同的。

3. 衰减的时间尺度和“等效”粘滞系数

上面给出的放大因子值均小于或等于 1, 这保证了格式的稳定。然而, 在有限差分方案中, 该放大因子值不能很清晰地度量耗散情况 (除非它远远小于 1)。一个十分简单而清晰的量度是耗散衰减的时间尺度。其定义为信号衰减为最初振幅的 e^{-1} 倍的时间。利用放大因子, 衰减的时间尺度为:

$$\tau = -\frac{\Delta t}{\ln|\lambda|} \quad (3.1)$$

耗散大小还可用产生相同阻尼的粘滞系数或超粘滞系数来表示。它依赖于波长的阻尼关系将表明耗散对尺度的依赖是比传统的拉普拉斯涡动粘滞系数公式大还是小, 而拉普拉斯对谱阻尼关系是 k^2 , 其中 k 为波数。

图 1—4 给出了上节提到的四种方案中每一种的衰减时间尺度对 α 和波长的依赖关系。注意 α 轴是线性的, 波长轴和等值线间隔是用对数表示。还请注意, 因为衰减时间尺度的波数因子仅用 $k\Delta x$ 表示, 所以垂直轴仍用无量纲化的 Δx 标出刻度。空间格距 Δx 还在 Courant 余数中出现, 这样, 时间和空间的离散化的效果不能完全分离。这将在第 5 节中进一步详细讨论。衰减的时间尺度以天数为单位, 时间步长 $\Delta t = 3600$ 秒。当适合使用有量纲数时, $\Delta x = 200$ km 和 $\Delta t = 3600$ 秒这两个值将作为有代表性的数使用。相对

于这个“代表性”的水平分辨率的值是取全球性长波波数 1 到尼奎斯特 (Nyquist) 方式截断的短波波数几十之间。下面将分别讨论半拉格朗日方案的长波和短波性质。

a. 长波

对于长波 ($k\Delta x \ll 1$), 放大因子中对波数的依赖项 $[1 - \cos(k\Delta x)]$ 减至大约 $\frac{1}{2}(k\Delta x)^2$ 。考察 (2.1) 式, 发现线性插值与拉普拉斯粘滞具有相同的谱性质, 而二次和三次插值则与双谱粘滞具有相同的谱性质。

通常是, 平流速度仅在一部分计算区域内是大的。对于 Courant 数小的区域, 放大因子近似为:

$$\left. \begin{aligned} |\lambda_1| &= 1 - \frac{1}{2}\alpha(k\Delta x)^2 \\ |\lambda_2| &= 1 - \frac{1}{8}\alpha^2(k\Delta x)^4 \\ |\lambda_3| &= 1 - \frac{1}{12}\alpha(k\Delta x)^4 \\ |\lambda_4| &= 1 - \frac{1}{36}\alpha^2(k\Delta x)^6 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

这清楚地表明了三次格式比二次格式的耗散大, 但其扩散的谱依赖关系是一致的。然而, 三次格式对位相的表示确实比二次格式好 (如 McDonald 1984 年所指出的)。

Purnell (1976)、Pudykiewicz 与 Staniforth (1984) 分析了三次样条插值, 从中可得到 $|\lambda_3|$ 的类似表达式, $|\lambda_3|$ 简化为:

$$|\lambda_3| = 1 - \frac{1}{12}\alpha^2(k\Delta x)^4$$

这个结果表明, 三次样条插值的耗散比这里使用的二次拉格朗日插值的耗散小, 但表现出相同的谱斜率。

对这些长波, 可由放大因子直接计算等效涡动粘滞系数。由于拉普拉斯摩擦而阻尼的平面波振幅的解析解为:

$$\hat{\psi}(k, t) = \hat{\psi}(k, 0)e^{-A_R k^2 t}$$

对时间用泰勒级数展开, 其放大因子为:

$$|\lambda| = 1 - A_R k^2 \Delta t + O(\Delta t^2)$$

然后使半拉格朗日步长的长波展开式的前两

项与上式前两项相等, 求出 A_H , 结果为:

$$A_{H1} = \frac{1}{2 \Delta t} (\alpha - \alpha^2) \Delta x^2$$

$$A_{H2} = \frac{1}{8 \Delta t} (\alpha^2 - \alpha^4) \Delta x^2 (k \Delta x)^2$$

$$A_{H3} = \frac{1}{24 \Delta t} (2\alpha - \alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4) \Delta x^2 (k \Delta x)^2$$

$$A_{H4} = \frac{1}{144 \Delta t} (4\alpha^2 - 5\alpha^4 + \alpha^6) \Delta x^2 (k \Delta x)^4$$

仅仅线性情况才有拉普拉斯的 k^2 谱阻尼性质。因为 α 的取值范围为 $0 \sim 1$, 所以这种情况下等效的拉普拉斯耗散的上限为:

$$A_{H1} \leq \frac{1}{2 \Delta t} \left(\frac{1}{4} \right) \Delta x^2 = \frac{1}{8} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \quad (3.3)$$

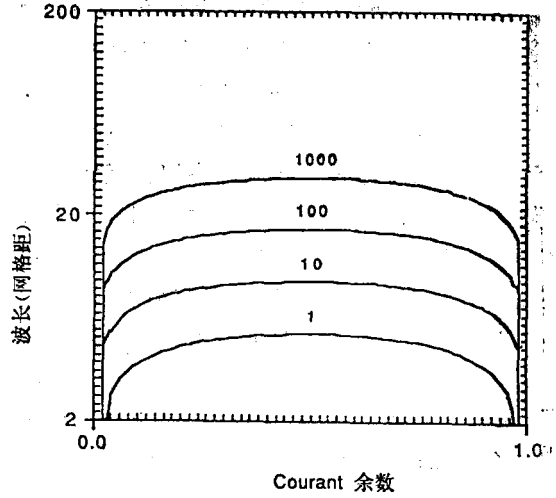


图 2 同图 1, 但为二次插值

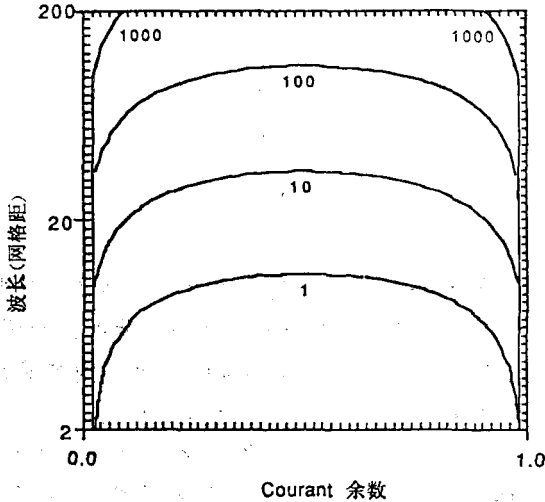


图 1 图中实线表明在线性插值的一维半拉格朗日平流情况下, 作为 Courant 余数 ($U \Delta t / \Delta x$) 和波长的函数的耗散衰减的时间尺度(天数)的等值线。注意竖轴和等值线间隔是用对数表示。靠近 $\alpha=0$ 和 $\alpha=1$ 的垂直等值线是人为绘出的

对于本节开头列出的参数, 这个值大约为 $1.4 \times 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 。对于大气, 尽管人们已认识到拉普拉斯涡动粘滞是大气中实际湍流耗散和扩散的相当不好的近似值, 涡动扩散系数值还是历来一直估计为小于 $10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 。

对双谱粘滞也可作类似的比较。等效的双谱粘滞为:

$$A_{B1} = \frac{1}{2 \Delta t} (\alpha - \alpha^2) \Delta x^4 (k \Delta x)^{-2}$$

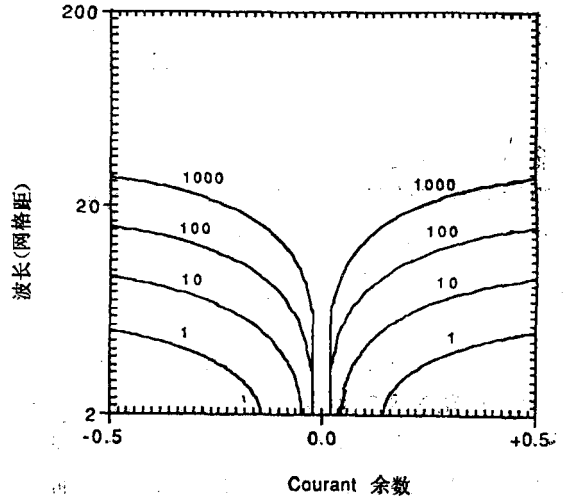


图 3 同图 1, 但为三次插值

$$A_{B2} = \frac{1}{8 \Delta t} (\alpha^2 - \alpha^4) \Delta x^4$$

$$A_{B3} = \frac{1}{24 \Delta t} (2\alpha - \alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4) \Delta x^4$$

$$A_{B4} = \frac{1}{144 \Delta t} (4\alpha^2 - 5\alpha^4 - \alpha^6) \Delta x^4 (k \Delta x)^2$$

注意 α 的范围, 二次和三次情况下的上限为:

$$A_{B2} \leq \frac{1}{8 \Delta t} \left(\frac{3}{16} \right) \Delta x^4 = \frac{3}{128} \frac{\Delta x^4}{\Delta t}$$

$$A_{B3} \leq \frac{1}{24 \Delta t} \left(\frac{9}{16} \right) \Delta x^4 = \frac{3}{128} \frac{\Delta x^4}{\Delta t}$$

(3.4)

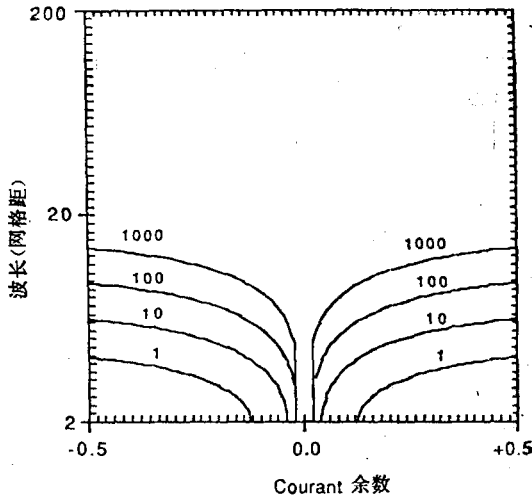


图 4 同图 1, 但为四次插值

对于本节开始列出的参数, 这两个值均为 $1.0 \times 10^{16} \text{ m}^4 \text{ s}^{-1}$ 。实际上, 要从观测上确定这个非物理意义上的耗散是困难的。欧洲中期天气预报中心的高分辨模式对中期预报使用的值大约为 $1.0 \times 10^{15} \text{ m}^4 \text{ s}^{-1}$ (见 Ritchie, 1988)。

b. 短波

对于短波, $[1 - \cos(k\Delta x)]$ 项对 k 所表现的依赖关系与长波不同。特别值得注意的是波长为 $2\Delta x$ 和 $4\Delta x$ 这两种情况, 这时, 其余弦项分别为 2^n 和 1, 此处 n 为插值的次数。其耗散仍随着波数的增加而增加, 但在靠近系统中的最短波时, 增加的速度比 k 的乘幂要慢得多。因此, 对于最短波, 等效涡动粘滞确实减小了, 而当格式的插值次数增加时, 效果变差。用通常的那种在此波长范围内设计“较大”的耗散来阻尼不精确的短波解的作法是不合适的。

考察一下这些特殊情况下的放大因子是有益的。它们是 α 的简单多项式:

$$L = 2\Delta x \text{ 时,}$$

$$|\lambda_1|^2 = 1 - 4\alpha + 4\alpha^2$$

$$|\lambda_2|^2 = 1 - 4\alpha^2 + 4\alpha^4$$

$$|\lambda_3|^2 = 1 - \frac{8}{3}\alpha - \frac{20}{9}\alpha^2 + 8\alpha^3 + \frac{4}{9}\alpha^4$$

$$-\frac{16}{3}\alpha^5 + \frac{16}{9}\alpha^6$$

$$|\lambda_4|^2 = 1 - \frac{16}{3}\alpha^2 + \frac{76}{9}\alpha^4 - \frac{32}{9}\alpha^6 + \frac{4}{9}\alpha^8$$

$$L = 4\Delta x \text{ 时,}$$

$$|\lambda_1|^2 = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2$$

$$|\lambda_2|^2 = 1 - \alpha^2 + \alpha^4$$

$$|\lambda_3|^2 = 1 - \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{9}\alpha^2 + \frac{4}{3}\alpha^3 - \frac{1}{9}\alpha^4$$

$$-\frac{2}{3}\alpha^5 + \frac{2}{9}\alpha^6$$

$$|\lambda_4|^2 = 1 - \frac{5}{9}\alpha^2 + \frac{29}{36}\alpha^4 - \frac{5}{18}\alpha^6 + \frac{1}{36}\alpha^8$$

当 α 较小时, 这些函数依赖关系说明: 偶数次格式对短波尺度有相似的耗散, 这种耗散比奇数次格式(也有相似的耗散)要小得多。图 1—4 表明这结论对恰好在尼奎斯特 (Nyquist) 截断以上的整十个波长也是正确的。

4. 与其它耗散格式的比较

许多用于平流问题的欧拉差分方案也是非守恒的, 把它们的耗散速度同半拉格朗日方案相比是很有意思的。三种有代表性的方案是迎风差分方案、Lax-Wendroff 方案和 Matsuno(欧拉后差)方案(上述方案和推导可见 Haltiner 和 Williams(1980)或 O'Brien(1986))。从推导中很容易看出迎风差分是通常的一次半拉格朗日插值方案(限于非多重迎风)。这种计算方案产生了等效的拉普拉斯(k^2)摩擦(同 3.3 式相同)。这种摩擦对于大尺度大气或海洋模式来说, 通常认为耗散太大了一些。

a. Lax-Wendroff 方案

可以表明, Lax-Wendroff 方案的一般形式是简单的二阶非多重迎风半拉格朗日方案。Lax-Wendroff 方案可以写成一种具有 $\frac{1}{2}U^2\Delta t$ 系数的似乎包含拉普拉斯(k^2)摩擦的形式, 所以, 它是 k^4 的谱阻尼。这可能有些出人意料。因为平流方程为:

$$\psi_t = -U\psi_x$$

用定义 $\frac{\partial}{\partial t}$ ，这样可以写成：

$$\psi_{it} = U^2 \psi_{xx}$$

ψ 对时间的泰勒级数展式为：

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \Delta t \psi_t + \frac{\Delta t^2}{2} \psi_{tt} + O(\Delta t^3)$$

用其定义代换 ψ_t 和 ψ_{tt} ，得到：

$$\psi^{n+1} = \psi^n - \Delta t U \psi_x + \frac{\Delta t^2}{2} U^2 \psi_{xx} + O(\Delta t^3)$$

尽管这是一个与拉普拉斯耗散相联的一阶(时间)平流方程，但不难知道，这是 ψ 值在 $x-U\Delta x$ 处的二次插值公式，也是通常的二阶时间方程，其耗散取决于空间导数的精度。常用的 Lax-Wendroff 方案对 ψ_x 和 ψ_{xx} 使用二阶空间中央差分时，便得出与二次半拉格朗日情况确实相同的输送作用。高阶空间差分得出三次或四次半拉格朗日方案。增加原来的泰勒级数(时间)的项数，其时间精度也增加到超过 $O(\Delta t)^2$ 。这里需要注意的是，在多维空间中，Lax-Wendroff 向前差方案与使用拉格朗日插值的半拉格朗日方案不同，因为拉格朗日插值引进了一些附加项到允许分立的泰勒级数展式中。

b. Matsuno(欧拉向后差)方案

Matsuno 方案是众所周知的二步积分方法，它可以写成：

$$\psi_j^* = \psi_j - \frac{u \Delta t}{2 \Delta x} (\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n)$$

$$\psi_j^{n+1} = \psi_j^* - \frac{U \Delta t}{2 \Delta x} (\psi_{j+1}^* - \psi_{j-1}^*)$$

放大因子为：

$$|\lambda|^2 = 1 - (a \sin k \Delta x)^2 + (a \sin k \Delta x)^4$$

对于长波，放大因子变为：

$$|\lambda|^2 = 1 - \alpha^2 (k \Delta x)^2 + O(k^4)$$

这些长波的等效拉普拉斯摩擦系数为：

$$A_n = \frac{1}{2 \Delta t} \alpha^2 \Delta x^2$$

对于长波，耗散的作用如同拉普拉斯摩擦；而对于较短的波，高阶项的作用是减小耗散的量级，使格式最终回到在 $k \Delta x = \pi$ 的中性稳定状态。这个拉普拉斯摩擦形式除了它取

决于 α^2 而不是 α 外，与线性半拉格朗日方案(或迎风差分)很相似。若 Courant 数为 1，则摩擦达到其上界：

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = 5.6 \times 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

5. 讨 论

a. 对 Δt 的依赖

第 2 和第 3 节中放大因子的表达式均取决于 Δt (通过 α 项)。对于一固定的平流速度，可以推导出各种选定时间步长的衰减时间尺度的比率的表达式。为方便起见，把时间步长相对于标准情况减为一半，这样可比较二次插值情况下的衰减时间尺度。

衰减时间尺度的比率十分简单：

$$\frac{\tau(\Delta t)}{\tau(\frac{\Delta t}{2})} = \frac{\Delta t}{\ln \lambda(\Delta t)} \frac{\ln \lambda(\frac{\Delta t}{2})}{\frac{\Delta t}{2}}$$

对于长波($k \Delta x$ 较小)，二次插值的泰勒级数展式为：

$$\begin{aligned} \frac{\tau(\Delta t)}{\tau(\frac{\Delta t}{2})} &= 2 \frac{\alpha_2^2(1-\alpha_2^2)}{\alpha_1^2(1-\alpha_1^2)} \\ &- \frac{1}{4} \frac{\alpha_2^2(1-\alpha_2^2)(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(1-\alpha_1^2-\alpha_2^2)}{\alpha_1^2(1-\alpha_1^2)} \\ &\times (k \Delta x)^4 + O(k \Delta x)^6 \end{aligned} \quad (5.1)$$

这里的 α_1 和 α_2 的定义如下：令 $\hat{\alpha}$ 为 Courant 数， α_1 表示标准情况下的 Courant 余数， α_2 表示半时间步长情况下的 Courant 余数。后面这两个量定义为：

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \hat{\alpha} - \text{NINT}(\hat{\alpha}) \\ \alpha_2 &= \hat{\alpha} / 2 - \text{NINT}(\hat{\alpha} / 2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

这里，NINT() 为取整数的函数。

根据上面给出的定义，(5.1) 式第二项的系数在所有情况下都较小(大概比第一项小 2—3 个量级)。很清楚，对于长波，($k \Delta x \ll 1$)，表达式的第一项对比率起决定作用。图 5 给出了当 Courant 数在 0—2 间变化时，纵坐标表示了(5.1)式第 1 项的常用对数的变化。负值意指较短的时间步长耗散小，同时正值意指较长的时间步长耗散也小。在 Co-

urant 数为 1.0 处, 比率趋于无穷大, 因为此处大时间步长衰减的时间尺度为无穷大。

实际上, 可典型地观测到较长时间步长的半拉格朗日平流方案耗散也较小。图 5 中间的细实线意指气流的大部值是在 $0.5 < \alpha < 1.5$ 范围内, 这范围内值是使方案计算有效和精确的有意义的值范围。当然, 也可以估计 Courant 数的分布, 和对 (5.1) 式 [也可用 (5.2) 式] 第一项进行积分, 获得衰减的时间尺度比率的一个单一值。除了对小 Courant 数的分布进行强加权外, 可期望其结果为对大时间步长阻尼减小。

b. 对 Δx 的依赖

前面曾提到了耗散衰减的时间尺度与格距的关系, 即对于网格间隔数固定的波长, 衰减的时间尺度与 Δx 无关。然而, 对于一固定的、“独立的”波长, 用 p 因子去减小格距, 如四种方案用 p^2 , p^4 , p^4 和 p^6 来减小格距, 便会增加它们的衰减的时间尺度 (即减小阻尼)。这还使得 Courant 数加倍, 从而得到改进。有效涡动粘滞对格距的这种强依赖关系提醒我们在选择离散方案时, 要备加小心。

c. 浅水波方程的结果

Ritchie (1988) 曾用浅水波谱模式做了一系列试验。此模式对在较复杂情况下有效涡动粘滞概念的应用作了极好的说明, 他选择了各种平流和扩散来进行一些谱模式模拟。欧拉模式用的是 $10^{15} \text{m}^4 \text{s}^{-1}$ 的双谱扩散系数; 半拉格朗日格式用的是拉格朗日双三次插值。Ritchie 文中的图 10 和 11 表明: 20 天后, 分辨率为 T 63 的半拉格朗日模式损失了 5% 左右的总能量, 大约为欧拉情况下的两倍。把分辨率增加到 T 126, 便导致在 20 天的积分时期内, 半拉格朗日情况下的能量损失变得微不足道 ($< 1\%$)。

分辨率 T 63 的情况与 Δx 为 200 km 大体相当, 所使用的时间步长为 3600 s。用此分析, 将得出一个上限值约为 $10^{16} \text{m}^4 \text{s}^{-1}$ 的相应的双谱粘滞系数。试验结果表明使用

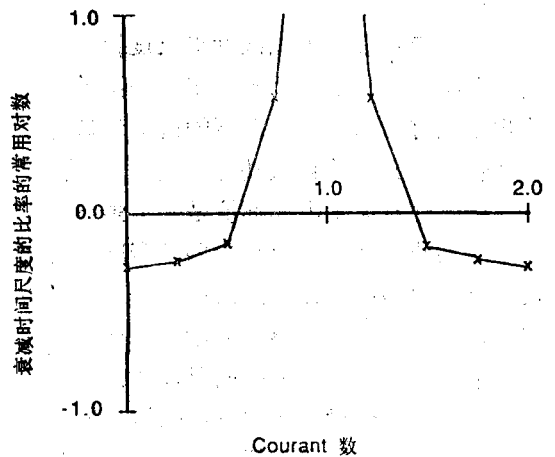


图 5 当时间步长减半时衰减的时间尺度的比率的常用对数值, 它是大时间步长的 Courant 数函数

约为 $2 \times 10^{15} \text{m}^4 \text{s}^{-1}$ 的有效粘滞系数比较合理。T 126 试验的粘滞系数为上面的 $\frac{1}{16}$ ($1 \times 10^{14} \text{m}^4 \text{s}^{-1}$)。事实上, 与 $10^{15} \text{m}^4 \text{s}^{-1}$ 相比, 观测到的粘滞系数要小。

d. 应用于海洋模式

把两种大尺度海洋环流模式以两种性质不同的方案运行。非涡动分辨模式用 100—400 km 的网格间隔, 并用 $10^4 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ 量级的拉普拉斯涡动粘滞系数来计算次网格尺度扩散。这些模式运行的时期从几十年到几个世纪, 被用于气候研究。涡动分辨模式的网格距为 20—40 km, 所用的拉普拉斯涡动粘滞系数的量级为 $10^2 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ 。这些模式运行的时期为几个月到几年, 被用于动力学研究。

线性插值的半拉格朗日平流要求相当细的网格来产生类似于上面提到的那些数值扩散值。假定时间步长这样选择: 每 1ms^{-1} 的平流产生的 Courant 数为 1, 那么, (3.3)

式可得出 $A_H = \frac{1}{8} \Delta x$ 。这对于非涡动分辨模式,

要求网格间隔为 80 km, 时间步长为 22 小时; 而对于涡动分辨模式, 则要求网格间隔为 0.8 km, 时间步长为 13 分钟。这两种方案的格距都太小, 尤其是后一种涡动分辨

模式中。

用双谱扩散来模拟次网格尺度耗散基本是一个特定的方法。因此,用于谱系数的值比用于拉普拉斯格点情况下的值更难确定。在对物理意义上的耗散缺乏清楚了解情况下同时注意风生海洋环流是一个强迫的、几乎非粘滞的系统,便至少要求衰减的时间尺度比强迫力的变化时间尺度长。对于风生流动,起主要作用是季节因素,这样,为使模拟准确,耗散衰减的时间尺度要比100天这个量级大。假设二次或三次插值,图2要求网格距要比人们所希望的、能使模拟准确的最短波长的 $\frac{1}{10}$ (甚至 $\frac{1}{20}$)还小,这种尺度设计是出于对精度的考虑,然而,完成这种分辨率水平的模拟,计算能力上往往达不到。

6. 结 论

对于平流速度为常数这种简单情况,归因于半拉格朗日平流的耗散已定量表示出,并与其它非守恒积分方案的耗散进行了比较。应用线性插值所导致的耗散实际上是拉普拉斯耗散,而二次和三次插值所导致的是双谱耗散。表明了拉普拉斯扩散系数和双谱粘滞系数均取决于分辨率,因此,在进行长

时间积分时必须对分辨率的取法应加以注意。用本文所介绍的公式[特别是(3.3)、(3.4)]可得到分辨率的较好估计值。用此值可得到模拟中所要求的各物理量的守恒性。对于一个完全守恒的积分,可用Ritchie(1986)的非插值法。由于对起点的不正确估计,本文没有提及它引起放大因子的误差。但McDonald(1987)对起点偏离状况详细分析了误差的量级。本文也没有指出由于时-空变化的速度场所引起的耗散的变化。因为这个变化是很难预测或监测的,所以在粘性流体模拟中,半拉格朗日技术不能作为唯一的粘滞源来使用。而在(几乎)非粘滞流体模拟中,它可以作为唯一的粘滞源使用;此模拟中,粘滞的存在仅仅是抑制非线性不稳定(例如Ritchie,1988;Côté和Staniforth,1988)。

图1—4表明,作为Courant余数 α 的函数的衰减时间尺度,在 α 的大多范围内接近最小值(即耗散最大)。因此,如果存在较宽范围的Courant余数,那么,在3a节中所计算的最差情况下的粘滞系数可能是些有代表性的值。

林峰译自 Monthly Weather

Review, Nov. 1988 皇甫雪官校