一个在球面半规则网格上的求解 Helmholtz 方程的多重网格法

Kenneth P. Bowman　Jin Huang

（美国伊利诺斯州立大学，大气科学系）

提要　该文就球面上求解 Helmholtz 方程的问题提出了一个多重网格有限差分法。有限差分网格的分辨率在纬度方向（即经向）不变而在经度方向（即纬向）可变，以使球面上网格点的实际间隔大致保持均匀。在每个网格点，把其残差减小到给定量所需要的 CPU 时间与网格分辨率无关。由于可变网格距的结果，其离散误差要比二阶误差稍糟些。该解算方法适用于球面上的一般椭圆型方程，对不宜做均匀网格距求解的一些问题也是有用的。

1　引言

地球物理问题常常需要在球坐标中解某些椭圆型方程，例如求解 Helmholtz 方程，即

$$\nabla^2\psi - \lambda\psi = f(\varphi,\theta) \tag{1}$$

式中 φ 是经度，θ 是纬度。为近似求解(1)，已设计了许多不同的数值方法，如谱方法、有限差分法以及有限元法。所有数值方法均是把连续问题的方程(1)转变成一组含 N 个未知数的 N 个独立的代数方程求解。衡量一个数值方法效率的两个关键数值是求解每个未知数需要计算的次数和实现这些计算所需的内存量。

求解这种独立离散问题的方法大致可区分为直接求解和迭代求解两种。各种谱方法通常是直接求解，而有限差分和有限元法则既可直接求解又可迭代求解。直接求解由于只需要 $O[N\log(N)]$ 次操作而往往比较快速，但一般需要 $O(N^{3/2})$ 内存。经典的迭代求解法，例如高斯-赛德尔迭代法或逐步超松弛(SOR)法均较为简捷，仅需 $O(N)$ 存贮量，但是，为使一个解收敛需要做 $O(N^{3/2})$ 或 $O(N^2)$ 次运算而求解速度一般较慢。

多重网格求解的方法是由 Brandt(1977) 引入，用于求解椭圆型问题的一个新型迭代方法。这种方法无论在计算量还是内存方面均已被证明效率最佳，因为对于包括直接求解无效的问题在内的各种问题来说，只需要 $O(N)$ 的运算和 $O(N)$ 的内存量。多重网格求解的这些优点即使对一些小问题也是有效的，不只是渐近求解方面。结果，对于给定 N 来说，多重网格求解法同可比较的谱的或有限差分的直接求解法相比，求解速度一样快或者相对快些；对大问题而言，所需的内存却少得多。

最近已发展了几种在球坐标中解椭圆型方程问题的多重网格法。NCAR 的 Adams(1989)发展的 MUDPACK 程序包便是一个适用于一般目的的椭圆型问题解算器，它能在球面规则经纬度网格上使用。因为拉普拉斯算子中与纬度有关的各系数能减慢在不同纬度上的迭代收敛，所以 Barros(1990)通过把球面网格分成几个子域（高纬区和低纬区），并在每个子域中采用最佳松弛法进行多重网格迭代使其收敛达到最优。这些方法都要求经纬度网格有规则的间距。但由于经度线在极地辐合，在某些情况下这种要求会造成困难。

另一种在不同纬带内采用不同松弛的方法是，改变网格点间距使得松弛算符的系数

大致保持为常数。本文介绍一个使用半规则网格的多重网格有限差分法以求解球坐标的 Helmholtz 方程。这里所介绍的方法中，每处均使用了一个简单的逐点松弛方法，但局地的网格分辨率要与拉普拉斯算符相适应。所发展的这个方法是针对一个二维、与时间有关的能量平衡气候模式，其中每一时步都要求解一个椭圆型方程。该方法还可在有椭圆分量的一些双曲型方程问题中使用。此处，为避免近极地区网格点的辐合，可以减少 CFL 判据对时间步长的约束，或者近极地区需要进行滤波。像对测值来源不同进行混合那样的资料分析问题（Oort 和 Rasmusson，1971；Reynolds，1988）来说，它可能也是有用的，这需要用等面积上的资料而不是规则网格点上的资料求解 Poisson 型问题。

2 各种方法

2.1 基本情况

多重网格求解方法是 Brandt（1977）按照前苏联文献（参见 Hackbusch，1985；Stuben 和 Trottenberg，1982方法的理论和历史评述）中的早期工作而引入的。Briggs（1987）曾提供过一个指导性的介绍。多重网格法的介绍以及在气象中的应用可在 Fulton 等人的工作中找到。他们列举了许多可用的多重网格软件包。

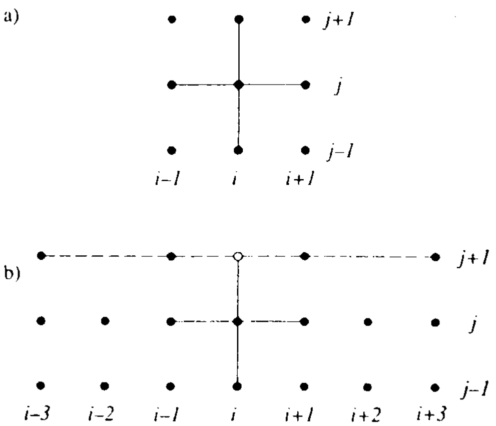

图1　用于规则网格区(a)的标准5点有限差分近似和内网格边界(b)上使用的有限差分算子。虚线为用于内插空圆圈处数值的各点连线

我们可以把各种松弛方法看成平滑器，它以迭代形式不断减少(1)的近似解的误差。常用于求解椭圆型问题（图1a）的，带有标准5点有限差分星型的松弛，可以有效地去除误差的最小尺度分量，在一个均匀、各向同性的网格上每次松弛扫描均减少其误差到原值的 0.25。各种经典迭代法的收敛在全球来说比较缓慢是由于对误差的各个大尺度分量阻尼缓慢引起的。多重网格法在格距不同的系统上通过对不同尺度误差分量进行平滑而加速迭代收敛速度。大尺度误差可在粗网格上进行有效阻尼而小尺度误差可在细网格上进行阻尼。多重网格法通过网格间的适当联系便能将所有尺度（从整个定义域到最小的网格距尺度）的误差有效减弱。

多重网格法的具体做法概要地叙述如下。只要给出如(1)的椭圆型方程问题，我们就能对该方程寻求形为

$$L\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{2}$$

的解。式中 L 是对(1)应用有限差分近似而形成的离散线性算子，$\mathbf{u}$ 是对该离散问题的精确解，而 $\mathbf{f}$ 是一个随机强迫。如果 $\mathbf{u}$ 的近似用 $\mathbf{v}$ 表示，那么，其偏差 $\mathbf{d}$ 可用

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{d} \tag{3}$$

来定义。以

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - L\mathbf{v} \tag{4}$$

定义的残差 $\mathbf{r}$ 被用来衡量 $\mathbf{v}$ 未能满足局地线性算子的程度。用由(3)式导出的表达式代替(4)的 $\mathbf{v}$，并利用 L 的线性性质，得到

$$L\mathbf{d} = \mathbf{r} \tag{5}$$

因此偏差 $\mathbf{d}$ 满足解为 $\mathbf{u}$ 的同一方程，只不过这里把残差 $\mathbf{r}$ 作为一个强迫而已。如果利用(5)求解出 $\mathbf{d}$，则可根据(3)计算出 $\mathbf{u}$。遗憾的是(5)像(1)那样难以求解。因此，这种形式上的转换看来并不能得到任何新东西。

然而，多重网格法可以用以下方式使用上述关系式。以初猜值 $\mathbf{v}$ 开始，用松弛法进行

一些迭代。在经过几次松弛扫描之后小尺度误差大为减少，而大尺度误差只是稍微有所减弱。利用(4)计算残差 **r**。因为松弛扫描已有效地抑制了各种小尺度误差，因而可以在一个较(2)更为粗的网格(在那里能较迅速找到解)上求解(5)，然后再将偏差 **d** 加上 **v**(此处需要内插)便得到一个 **u** 的改进的近似值。因为偏差 **d** 不是使用细网格分辨率计算的，所以，订正的解不是精确的。因此，这个求解过程必须重复至残差充分小时为止。这种双重网格迭代的总结果是由于对不同网格上不同尺度误差进行了有效阻尼而加速收敛。对多重叠套的网格层而言，亦可以递归的方式使用该方法直至递归到一个很粗的网格为止，从而使问题在该网格上可非常迅速地得到解答(既可直接求解也可通过松弛法求解)。因此，一个多重网格求解方法由四部分组成：一个能在每个格点上有效平滑掉各种小尺度误差的松弛方法；一个把残差从细网格传递给粗网格的约束方法；一个把粗网格校正值加到细网格解上的插值方法(也称拓展法)；以及一个组织松弛扫描和网格间传送的循环方法。

2.2 多重网格求解法

在二维球面坐标中我们发展了一个有限差分多重网格求解法以求(1)式的近似解。这个求解方法的各个环节叙述如下：

2.2.1 有限差分网格

此处用到的半规则网格的基础点是一个规则的经-纬度网格。在每个网格层* 上，各网格点位于点 (φ_i, θ_j) 上，这里 $\varphi_i = i\delta\varphi - \pi$，$i = 0,1,\cdots,m_l$；$\theta_j = j\delta\theta - \pi/2, j = 0,1,\cdots,n_l$。网格分辨率为 $(m_l + 1) \times (n_l + 1)$，这里，$m_l = m_0 2^l$，而 $n_l = n_0 2^l$。网格点间距为 $\delta\varphi$ $(= 2\pi/m_l) \times \delta\theta (= \pi/n_l)$。最粗网格 $(l = 0)$ 具有 $(m_0 + 1) \times (n_0 + 1)$ 的范围。从效率上讲，这个范围应选择尽可能的小。这里所有的计算中，$m_0 = 4$，$n_0 = 2$。因而，经向和纬向网格点距离相等。位于两极的两个网格点以及为了程序设计的方便，在 $\varphi = \pm\pi$ 处有一对完全相同的网格点列。通过不断使 l 增加，直至获得足够分辨率为止而形成较细的网格。在每个网格层上把网格分辨率增加2倍以保证粗网格点正好和细网格点重合。

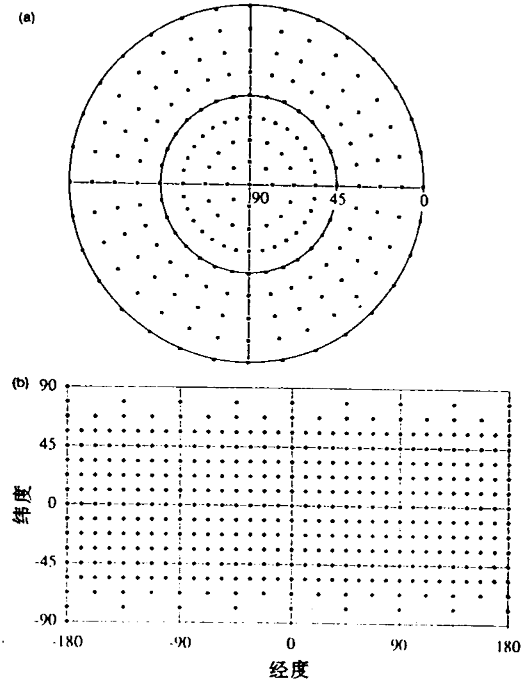

图2 用于极射和圆柱形等距投影的典型半正则网格

我们对上述规则有限差分网格进行了改进，提出了一个网格距实际距离大致相等而在纬度和经度上又尽可能保持规则的网格。所选用的方法是纬度方向网格距保持不变而经度方向网格距是变化的，在一个单位球面上，纬向以 $\delta\varphi$ 分割的两网格点间的实际距离为 $\delta x = \cos\theta\delta\varphi$。由于从赤道向极地移动时每个纬度带中绕纬圈的网格点数减少了 1/2，使 δx 无论什么时候均变得比 $\delta\varphi/2$ 还要小。在数字编码中这是通过对每个纬度带确定一个网格点跳跃系数来实现的。所得到的网格点在±60°纬度之间(在这个纬度带里 $\cos\varphi \geqslant 0.5$)是规则的，而在60°的向极的经度方向上就渐渐变得较粗了。用极射和圆柱形投影所

* 校者按："网格层"指的是把原有网格划分成多个相重叠的网格中的某一重网格来说的。

得到的网格表示在图2中。

2.2.2 松弛

用于规则网格部分的松弛算子是简单的5点星型(见图1a),有限差分近似有以网格距表示的2阶精度,即 $O(\delta\varphi^2, \delta\theta^2)$,如图1b 所示的网格内边界上由于跳读 $v_{i,j+1}$,因而不能直接使用这个5点星松弛。在这种情况下,第 $j+1$行遗漏点的值利用用经度表示的三次多项式内插得到,即图1b 中用空心圆圈标记的跳读点的值是用 $v_{i-3,j+1}$, $v_{i-1,j+1}$, $v_{i+1,j+1}$和 $v_{i+3,j+1}$的值内插的(我们发现经度线性内插使整个解的精度大为降低以致无法为人们接受)。但只有少量的一些点需用这种方法内插。

因为微分算子在两极是奇异的,因此,5点差分星型不能在此应用而必须找到一个替换的办法。松弛方程在极地的值可在那些半径为 $\delta\theta/2$ 的极冠上对(1)积分并应用散度定理*而求得。由于在极点和周围行点之间采用纬度方向的中央有限差分,因而可以令极冠边界的通量的积分与该极冠上外强迫的积分相等。在周围行中总至少有4个点,所以得到的近似与标准的5点型差分近似非常接近。正如 Barros(1990)曾指出的,这种差分近似的精度亦为2阶。

松弛法是以带有红/黑的各点(即时替换校正值)的高斯-赛德尔方法。因为受到内边界的限制,因而要正确划分出红点和黑点是不可能的,但偏差看来并不是重要的。

2.2.3 残差的约束

用一个带权重的9点算子来约束粗网格的残差值。在已知的粗网格点上,来自周围9个细网格点的带权重残差是利用包围每个网格点的矩形的面积做权重[与$(\cos\theta)\delta\varphi$成比例]来计算的。该矩形区的边界是用已知网格点与每个方向上毗邻的细网格点之间距离的一半围成的。因为我们不能进行红/黑的正确调整,同时因为用松弛后在内边界上重复进行插值,因而各黑色残差值未必是零,因此,在残差引入方面使用了全部9点残差。

2.2.4 粗网格订正值的内插

我们用双线性内插将粗网格偏差(订正)插值到细网格上,先沿纬圈插值,然后再沿经圈插值。在那些粗、细网格重合的点上,这种方法就简化为简单的加法。

2.2.5 多重网格的循环策略

多重网格求解法的最后环节是迭代策略,即用以安排松弛扫描、约束和插值的执行顺序。有效的策略方案种类繁多,有固定方案,也有适应方案(Brandt, 1977; Hackbusch, 1985)。经过某些实验之后,发现固定的 v 循环的方法按总计算时间说通常最快。在一次 v 循环的递减部分中,在每个网格松弛后,接着把残差转移到下一个较粗网格上。最粗网格松弛完成时,便将订正值加到下一个较细的网格上,并进行一次松弛扫描。反复重复这一过程直至松弛扫描对最细的网格起作用为止。人们用到的整个多重网格法,在最粗网格上以一个 $v=0$初始猜值开始,一连串地增加 v 循环以构造最细网格的初始猜值,于是,反复进行整个 v 循环直至达到收敛为止。

我们能较容易地改变迭代策略以适应不同的松弛扫描数或其它变化。

3 结果

3.1 多重网格迭代的收敛性

通过求解分析解已知的问题来检验多重网格程序。球坐标中拉普拉斯的特征函数是球面调和函数 $Y_{l,m}$,因此,如挑选的强迫力为 $[-l(l+1)+\lambda]Y_{l,m}$,则(1) 的解便是 $Y_{l,m}$,在下面一些例子中,挑选的强迫为 $Y_{2,1}$,它具有较大的空间尺度,这种单一网格高斯-赛德尔松弛是典型的低效率求解。其收敛性可通过计算全球均方根残差来量度,而离散误差 e 则可根据其分析解和数值解之间的差

$$\mathbf{e} = \psi - \mathbf{v} \tag{6}$$

来确定。

* 校者注:即 Gauss 公式。

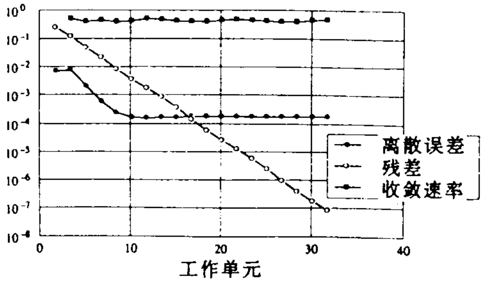

图3　多重网格迭代的收敛性。图中各值是每次 v 循环结束时点绘的，约5次循环其误差便减小至离散误差。约30个工作单元使残差减小至10^{-7}而收敛速率近于不变，为0.44

图3表示的是具有128×64的最细网格的多重网格迭代求解的收敛性。在这个分辨率上有6个网格层。其工作量用细网格上松弛扫描为单位来度量，而把引入和插值计为两网格中较细网格上一次松弛扫描值的1/4。松弛一个粗网格所要求的工作量是在相邻较细网格上所要求工作量的1/4。一次单程 v 循环的总工作量约为3个工作单元。用大约30个工作单元(<20次 v 循环)便可将均方差的残差减小到小于10^{-7}。用约5次 v 循环(约10个工作单元)无便可将误差减小至离散误差。每次 v 循环的收敛速率约为0.44。因为保留了网格的各向异性，因而其收敛速率要比平面上均匀的、各向同性网格所达到的收敛速度(0.25)还要差些。60°S 与60°N 之间均匀网格区域的 Fourier 分析得到0.64的平滑因子(S. Borros，私人通信)。由于每次循环有两次松弛扫描，预计的收敛速率大约为$(0.64)^2=0.41$，这表明松弛方案的其它环节可能是选择正确了。

3.2　离散误差和效率

不断改变网格分辨率进行一系列数值试验以确定多重网格算法的离散误差和效率。所得试验结果示于图4中。网格距减半其均方根误差大约减少了0.28而不是按理想的根据一个2阶方法所期待的减小0.25。这也许是由于内边界的处理引起的，因为近内边界处的局地误差比网格距均匀的赤道区中的要稍大些。

由4倍网格点数引起的计算时间的增加是4.0。图4表示对各次4倍网格距的估算时间的平均。给定的计算机时间是指在大气科学系的 Hewlett-Packard 835计算机上以双精度完成计算。计算机时间有点波动，这与收敛的变化和计时程序的不精确有关。把残差减小至10^{-7}的工作近于30次松弛扫描(相当于做<20次 v 循环)，而与网格分辨率无关。

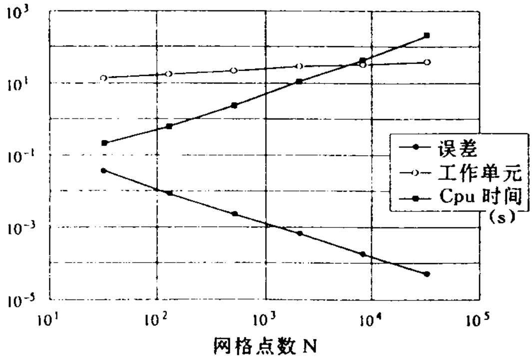

图4　作为网格点数 N 的函数的数值解的离散误差、以秒表示的 CPU 时间以及将残差减少至10^{-7}需要的工作单元

4　结论和建议

本文指出，多重网格法通过把球面划分为几个带状子区域(在每个子域中有大致均匀的分辨率)便可在球坐标半规则网格上成功地解 Helmholtz 型问题。每个网格点把其残差减小到给定量所需的 CPU 时间与网格分辨率无关。这一方法的内存需求量为 $O(N)$，这是典型的多重网格迭代方法所需求的量。

如果规则网格适用于现有问题，那么，由 Barros(1990)和 Adams(1989)发展的方法要比本文所介绍的以每次 v 循环的收敛速率低达0.1的方法更为有效。为了用在 Cray 机上，使 MUDPACK 程序向量化，而源程序是从NCAR获得的。本文介绍的关于半规则

(转44页)

(接 49 页)
网格的方案,在规则网格不能用时将是有用的,并适应于更为一般的网格。

多重网格法的发展使得有限差分方法与球坐标中的谱方法不相上下乃至胜过谱方法(Barrros 等,1990)。对受到局地强迫的,在网格上比用基本谱函数更易描述的各类问题,多重网格法在计算时间和内存方面可能有更大的优越性。其算法不很复杂,只包括松弛、对残差平均、向粗网格输送以及把修正值插值返回较细的网格。由于有了像 MUDPACK 这样的标准软件(这些细节对用户几乎是完全保密的),因此,在球坐标中可迅速提出有效而简单的解椭圆型问题的方法。

冯树常、彭爱和译自美国《天气月刊》

Vol. 119, 1991, No. 3　　廖洞贤校