

格点模式中水平扩散的隐式公式

G. Jakimow E. Yakimiw A. Robert

1 引言

数值预报发展的早期,人们总是在模式中考虑水平扩散,这是把扩散项作为滤波器来阻尼虚假的短波。这种方法一直沿用至今,尽管最近改进的模式(不含有扩散)能产生合理的平滑预报,但在这些模式中,微弱的扩散可以改进预报结果。

水平扩散往往被认为是模式的次网格尺度参数化的一种物理过程。通常认为:当空间分辨率增加时,扩散系数减小。在许多情况下,是采用能产生湍流理论中功率谱的方法,把水平扩散放在模式中考虑的。

在下文中,水平扩散被看成是预报准确性的验证评分的一种方法。它将表明已失去预报作用的波从预报中消除。由于短波首先失去预报作用,所以水平扩散先滤去短波,然后再滤去较长的波。

这意味着水平扩散是一种数学过程而不是一种物理参数化,但要提醒的是这种观点是不会长久成立的。随着模式变得更加精巧,对数学扩散的需要也将大大减少,以致于水平扩散最终不得不被看成一种物理过程。数学扩散的另一种不足是它掩盖一些需要订正的不稳定性。由于这些原因,在以下各节中建立的扩散公式需要小心使用。

2 位移误差的补偿

大部分气象中心使用谱模式进行天气预报,在这些模式中,水平场由球谐函数描述。变量的谱描述通常由许多波组成,每一个波均是由波数定义的周期连续函数,而它的属性由振幅和位相角表示,这些参数值由观测

值推算而来。

用波动研究大气运动是一种常用方法。假设变量 F 可用下面一个单波描述:

$$F = Ae^{i\theta} \quad (1)$$

这个波将在 (x, y) 平面用波数 (k, l) 描述,且假定移速为 (U, V) , 因此

$$\theta = k(x - Ut) + l(y - Vt) \quad (2)$$

方程中的 A, U, V 是常数。在一个数值模式中,对上述同一个波可描述为:

$$F^* = A^* e^{i\theta^*} \quad (3)$$

且

$$\theta^* = k(x - U^*t) + l(y - V^*t) \quad (4)$$

式中 (U^*, V^*) 也是一个常值速度矢量,且不一定与 (U, V) 相同。如果这些矢量不同,那么模式将包含位移误差。假定 A^* 和 A 不同,模式还将包含振幅误差,我们的注意点放在由模式产生的误差 E :

$$E = F^* - F = A^* e^{i\theta^*} - Ae^{i\theta} \quad (5)$$

$$E = [A^* e^{i(\theta^* - \theta)} - A] e^{i\theta} \quad (6)$$

$$E = [-A + A^* \cos(\theta^* - \theta) + iA^* \sin(\theta^* - \theta)] e^{i\theta} \quad (7)$$

误差模的平方为:

$$|E|^2 = [A - A^* \cos(\theta^* - \theta)]^2 + [A^* \sin(\theta^* - \theta)]^2 \quad (8)$$

这个量将作为预报评分:

$$S = |E|^2 = A^2 + (A^*)^2 - 2AA^* \cos\theta' \quad (9)$$

式中

$$\theta' = \theta^* - \theta = -[k(U^* - U)t + l(V^* - V)t] \quad (10)$$

在这里,考察下列四种情形:

$$1) A^* = A, \quad S_1 = 4A^2 \sin^2(\theta'/2) \quad (11)$$

$$2) A^* = 0, S_2 = A^2 \quad (12)$$

$$3) A^* = A \cos \theta', S_3 = A^2 \sin^2 \theta' \quad (13)$$

$$4) A^* = A \exp[-1/2(\theta')^2],$$

$$S_4 = A^2 \{1 + \exp[-(\theta')^2] - 2 \exp[-1/2(\theta')^2] \cos \theta'\} \quad (14)$$

图1标出了这四种情形。第一条曲线 S_1 对应于第一种情形：所有误差都表明在位移上，此时振幅预报准确。因为 θ' 与 t 成比例，所以这条曲线可以认为误差的方差是时间的函数。最大值出现在预报波与观测波反位相时。这条曲线的特点是在 $\theta' = \pi$ 时，误差模达到最大值4。第二条曲线 S_2 对应第二种情形：把波从模式中除掉，这叫做无技术预报。在这种特殊情形下，对所有的 θ' 都有 $S_2/A^2 = 1$ ，其目的在于产生小于 S_2 的预报评分。在理论上可以选择使 S 为最小的 A^* 来进行，这就是第三条曲线 S_3 ，注意在这种情形下 A^* 是时间函数，实际上 A^* 随时间振荡。

第四种情形对应的是波逐步减弱，这种情况在小的 θ' 值下与第三种情形相似，尤其是在 $\theta' = 0$ 到 $\theta' = \pi/2$ 最近似于 S_3 ；在较大的 θ' 值下近似于 S_2 ；对于 $\pi/2 < \theta' < 3\pi/2$ ，较接近于 S_1 。

将(14)式中的阻尼引入模式中，这里

$$\frac{\partial A^*}{\partial t} = - \left(\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial t} \right) A^* \quad (15)$$

式中

$$\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial t} = \alpha t \quad (16)$$

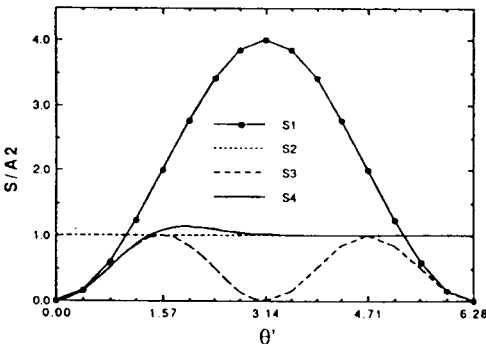


图1 四种情形下作为 θ' 函数的均方差

且

$$\alpha = (kU' + lV')^2 \quad (17)$$

因为单波合并后相速度误差一般不能预先确定，所以要用到的 α 值不能知道。另一方面，有可能通过对大样本的平均确定一个 α 的典型值：

$$\bar{\alpha} = \overline{(kU' + lV')^2} \quad (18)$$

或

$$\bar{\alpha} = k^2 \overline{U'U'} + 2kl \overline{U'V'} + l^2 \overline{V'V'} \quad (19)$$

对于大统计样本，通常认为下式成立：

$$\overline{U'V'} = 0 \quad (20)$$

$$\overline{U'U'} = \overline{V'V'} = \frac{1}{2} \overline{(U'U' + V'V')} = \frac{1}{2} \Delta V^2 \quad (21)$$

式中 ΔV 是速度偏差，由此得出：

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2} \Delta V^2 (k^2 + l^2) \quad (22)$$

同时可以得到下列关系式：

$$\frac{\partial A^*}{\partial t} = - \frac{1}{2} \Delta V^2 t (k^2 + l^2) A^* \quad (23)$$

由(1)和(2)式给定的波满足下列微分方程：

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + U \frac{\partial F}{\partial x} + V \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

方程(1)中的 A 为常数。如果这个波像(23)式那样存在阻尼，那么微分方程变为：

$$\frac{dF}{dt} = - \frac{1}{2} \Delta V^2 t (k^2 + l^2) F = \frac{1}{2} \Delta V^2 t \nabla^2 F \quad (25)$$

或

$$\frac{dF}{dt} = \gamma t \nabla^2 F \quad (26)$$

式中

$$\gamma = \frac{1}{2} \Delta V^2 \quad (27)$$

这就是需要引进模式中的扩散，可以发现扩散系数 (γt) 随时间增加而增加 (大部分模式使用的扩散系数不是时间的函数)，还可看到，它是一个二阶拉普拉斯 ∇^2 类型的扩散 (而在许多模式中采用的是四阶拉普拉斯

∇^4 扩散)。

由于系数 γ 主要依赖于与特定模式相联系的单位时间内位移速度误差的变化,所以 γ 是一个依赖于模式的参数。不准确的低分辨率模式使用 γ 值较大,而准确的高分辨率模式则使用的 γ 值较小。

3 隐式公式

大部分天气尺度模式使用蛙跃式时间积分格式,为了使用这一方法,微分方程通常写成下列形式:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = A + D \quad (28)$$

换句话说,在每一个方程中,把局地时间导数项放在方程左边,把其他项放在方程右边。上式中的 A 和 D 正是那些出现在方程右边的项,时间离散过程如下:

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t - \Delta t)}{2\Delta t} = A(t) + D(t) \quad (29)$$

但是,这种形式因右边的项发生阻尼(耗散)或扩散是不稳定的,为了绕开这个问题,(29)式常常写成:

$$F(t + \Delta t) = F(t - \Delta t) + 2\Delta t[A(t) + D(t - \Delta t)] \quad (30)$$

在上述公式中, D 是等价于在 $t - \Delta t$ 时计算的能阻尼波的那些项, A 是平流项和其他在 t 时导致波振荡的项,这个公式是条件稳定的,且对于小的时间步长计算良好。

在许多模式中,习惯把公式分解成:

$$F^* = F(t - \Delta t) + 2\Delta t A(t) \quad (31)$$

$$F(t + \Delta t) = F^* + 2\Delta t D^* \quad (32)$$

这里中间变量 F^* 用于阻尼或扩散项的计算, D^* 代表计算结果。这个公式较稳定且与(30)式一样准确。

为了使用(26)式中的水平扩散,(32)式的算法改为:

$$F(t + \Delta t) - 2\Delta t \gamma(t + \Delta t) \cdot \nabla^2 F(t + \Delta t) = F^* \quad (33)$$

此式的优点为它是无条件稳定的,但它

需要解亥姆霍兹方程。一种较有效的算法是对(33)式左边在空间上进行分解:

$$\left[1 - 2\Delta t \gamma(t + \Delta t) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \times \left[1 - 2\Delta t \gamma(t + \Delta t) \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] F(t + \Delta t) = F^* \quad (34)$$

此式给出的空间分解产生的一个算子最近是由 Raymond (1989) 和 Raymond 与 Garder (1988) 提出的。这个算子需要进行三角矩阵的逆变换,它是用作为二维水平隐式滤波器。

对于一个二维单波(波数为 k 和 l), (33)、(34)式为:

$$F(t + \Delta t) = R(k, l) F^*$$

式中,对于(33)式

$$R(k, l) = [1 + 2\gamma \Delta t (t + \Delta t) (k^2 + l^2)]^{-1}$$

而对于(34)式

$$R(k, l) = [1 + 2\gamma \Delta t (t + \Delta t) (k^2 + l^2) + 4\gamma^2 \Delta t^2 (t + \Delta t)^2 k^2 l^2]^{-1}$$

由于含 (k^2, l^2) 的附加项永远是正值,所以(34)式是一个比较小的值。

(34)式将用于模式中,它也是无条件稳定的。它比(33)式的算法有更强的扩散,但可用一个较小扩散系数 γ 进行补偿。这种扩散将用于完整的三维模式中的水平风分量、温度和湿度方程。

4 试验结果

这里将使用 Robert 等的半球模式,它由全球谱模式推演而来,且包括许多物理过程参数化,但现在许多情况下进行了简化。因此它不是一个高精度模式,位移误差要比在那些物理过程完善的最好模式中看到的位移误差大。故这里所用的简化模式需要较大的扩散系数值 γ 。

第一组数值试验是从 1978 年 12 月 21 日 0000 时的 FGGE 资料以 13 个不同的 γ 值进行的(模式使用 60°N 381km 的格距),所有的预报在第 5 天得到验证。图 2 是 $30-90^\circ$

N 在 1000—100hPa 上的垂直平均的位势高度均方根误差差曲线(γ 的函数), 这条曲线在接近 $\gamma = 1.5\text{m}^2\text{s}^{-2}$ 处有一最小值, 这就是最佳评分值。

模式使用的含内插半拉格朗日方案包含一些固有扩散, 恐怕要在中期预报特别是模式分辨率较低时产生过多的扩散。这条曲线表明附加扩散改进了预报评分。假如与半拉格朗日方案相联系的固有扩散确实过多, 那将是另一种情况。另一方面, 在一些特殊情况下小区域上固有扩散可能确实过多, 那么附加扩散在别处能改进预报(评分), 且低层的半拉格朗日方案的固有扩散将是不正确的。

图 2 也标出了第二组数值试验(格距为 254km)。在这种情况下, 曲线在 $\gamma = 2.0\text{m}^2\text{s}^{-2}$ 处有一最小值。对于这个较高的模式分辨率, 半拉格朗日固有扩散减少, 也就需要稍微大的 γ 值来补偿。

图 3 与图 2 相似, 但用了另一天的 FGGE 资料(1979 年 2 月 12 日 1200 时), 第二条曲线使用 190.5km 的格距。同样, 最小值移到较高分辨率的右边。对于这个例子, 似乎要用一个较大值($\gamma = 4$)。奇怪的是, 在这种情况下高分辨率模式的预报比低分辨率的预报还要糟。

图 4 和图 5 是上面两种情况的第 2 天预报的类似曲线, 在图 4 中, 模式使用 381km 格距的这一组试验表明: 在原点附近有一个最小值, 也就是说明此时半拉格朗日固有扩散是充分的; 而 254km 格距的这一组试验的最小值在 $\gamma = 2.5$ 处。图 5 的曲线表明具有相似的结果, 而图中 190.5km 格距的曲线最小值在 $\gamma = 3.5$ 处。比较第 2 天(图 4 和 6 图 5) 和第 5 天(图 2 和图 3) 的结果得出, 系数 γ 似乎应该随时间稍微增加。根据(27)式, $\gamma = 2\text{m}^2\text{s}^{-2}$ 对应于相速误差 $\Delta V = 2\text{ms}^{-1}$ 。Toll 和 Clune(1985) 的 NOGAPS 模式给出了相速误差(由位移误差计算)的一个估算值, 这是他们研究了 1149 个低压中心且积分到 48 小时后得到的, 但注意: 位移误差在气旋生命过程

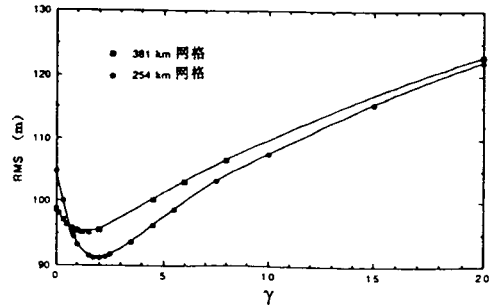


图 2 第 5 天预报中的均方根误差是水平扩散系数 γ 的函数。这些试验使用 1978 年 12 月 21 日 0000 时的分析变量

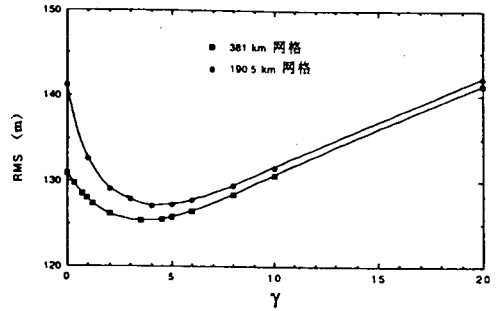
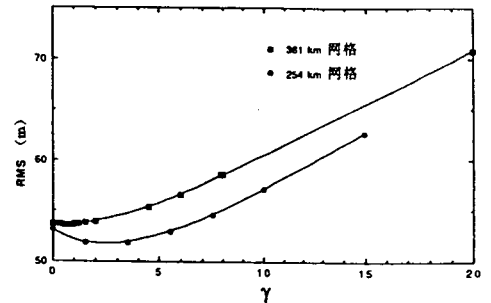


图 3 与图 2 相同, 试验使用 1979 年 2 月 12 日 1200 时的分析变量



4 与图 2 相同, 48 小时预报中的均方根误差

的前一阶段是较大的, 而在后期是较小的。还可看到, 误差在 12 时较大, 往后较小。从他们的结论得出: 风(相)速误差接近但稍小于 2ms^{-1} , 因此, $\gamma = 2\text{m}^2\text{s}^{-2}$ 似乎很接近最佳值, 这个值将推荐用在均方根预报误差的最优化之中。

2ms^{-1} 的速度误差对应于在 48 小时预报中的 345km 的位移误差。Silberberg 与

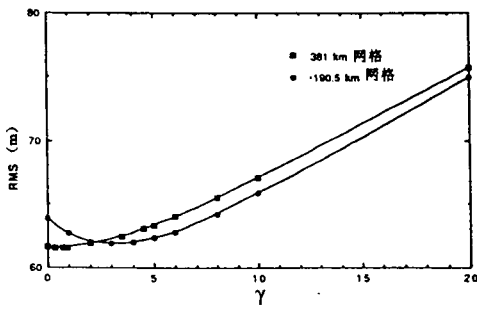


图5 与图3相同,48小时预报中的均方差

Sosart (1982) 利用 LMF-I 模式, 研究 1138 个低压中心并得出 48 小时预报中 432km 位移误差值对应于 $\Delta V = 2.5 \text{ ms}^{-1}$ 或 $\gamma = 3.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, 后者稍大于上面所推荐的值。

这里提出的水平扩散可用下列关系式和一些模式中的二阶扩散相比较:

$$K = 0.5\gamma T \quad (35)$$

式中 T 是预报时效的长度, K 为通常使用的扩散系数。发现当 $\gamma = 2.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ 时, 对于 $T = 24$ 小时, $K = 0.8 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$; 对于 $T = 48$ 小时, $K = 1.73 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$; 对于 $T = 5$ 天, $K = 4.3 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 。

Mailhot 与 Chouinord (1989) 使用 $K = 1 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (对于涡度和温度扩散) 和 $K = 3.1 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (对于散度扩散) 在 190.5km 的网格上进行 48 小时预报。在用浅水波方程的全球格点模式完成的一项研究中, McDonald 与 Bates (1989) 只对散度运用水平扩散进行 5 天预报, 他们地用 $K=0$ 积分也获得了成功, 但他们的多数试验是用 $K = 8.6 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 完成。这值好像是过大一些, 但这种扩散只用于散度, 而散度在浅水波方程模式中不是原始基本变量。在另外一项用欧洲中期天气预报中心的全球谱模式完成的研究中, Laursen 与 Eliassen (1989) 则使用从 $K = 0.25 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 到 $K = 1.0 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 之间的变化值, 他们用 $K = 0.5 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 完成的标准试验表明, 动能谱分布同波数大于 7 的观测值表现出较好的一致性。

5 隐式扩散的验证

为了说明方便, 我们再回到 (30) 式, 这是一种常用在数值模式中的时间离散方案, 方程右边的 A 和 D 写成下列形式:

$$A(t) = i\omega F(t) \quad (36)$$

$$D(t - \Delta t) = -aF(t - \Delta t) \quad (37)$$

在这种情况下, 稳定积分的最低条件是:

$$a\Delta t < 1 \quad (38)$$

这是 $\omega=0$ 的情况。当 $\omega \neq 0$ 时, 稳定性条件有较多的限定。假如用常用扩散代替 (38) 式中的 a , 得到:

$$K(k^2 + l^2)\Delta t \leq 1 \quad (39)$$

对于空间离散的最通用形式, 这个表达式变为:

$$K \left[\frac{\sin^2(0.5k\Delta x)}{(0.5\Delta x)^2} + \frac{\sin^2(0.5l\Delta x)}{(0.5\Delta x)^2} \right] \Delta t \leq 1 \quad (40)$$

导出:

$$\frac{8K\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1 \quad (41)$$

由此, 对于在极射赤道投影中 60°N 190.5km 的格距的一个积分, 得出:

$$K \leq \frac{\Delta x^2}{8\Delta t} \quad (42)$$

109.5 对应的赤道上的格距为 102km。因模式的格点分布稍稍越出赤道, 我们把这个值将用在 (42) 中。模式使用的时间步长为 1 小时, 由此得出:

$$K < 3.6 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

和相应的 γ 的临界值为:

$$\gamma = 0.83 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

可以看出, 在本文中使用的超过这个临界值的 γ 值完成了几个试验。甚至为优化均方根预报评分而推荐的值也超过了这个临界值。

这里目的不是强调预报评分的最优 γ 值, 这只不过是一个应用实例, 期望从中得到隐式公式。另外一个有关的例子是在格点模式中 ∇^4 类型扩散的使用。使用 Raymond

(1989)和 Raymond 与 Garder (1988)提出的隐式公式是可行的。另一方面,如果模式使用了显式扩散,那么相应的临界值为:

$$K = 0.4 \times 10^{15} \text{ m}^4\text{s}^{-1}$$

这个值比常用在谱模式中的值要小。隐式公式通常用在谱模式中,这是因为隐式公式在谱空间中表达比较简单。从前面各节中可以看出,大致类似的公式可用在格点模式中,因此,隐式公式的应用是令人满意的。

一般地,包含在模式中的水平扩散是用来削弱由空间离散造成的计算噪音,对于二阶有限差分近似,六阶扩散 ∇^6 将产生最优结果。与第二节中相似的推导表明,这种高阶扩散系数也应该随时间呈线性增加,其值应足够大以满足隐式公式的需要,甚至为了满足短期积分的需要。

下式给出一维坐标中二阶欧拉平流:

$$\sin(kU^* \Delta t) = \frac{U \Delta t}{\Delta x} \sin(k \Delta x)$$

式中 U 是解析解的输送速度,而 U^* 是相应的数值解。对于小的 Courant 数,上式简化为:

$$U^* = U \frac{\sin(k \Delta x)}{k \Delta x}$$

对于长波,得到:

$$U' = -\frac{1}{6} U k^2 \Delta x^2$$

在二维坐标中,另一个分量是:

$$V' = -\frac{1}{6} U l^2 \Delta x^2$$

将它们代入(19)式,能使我们得到平流扩散方程:

$$\frac{dF}{dt} = -\gamma_t \nabla^6 F$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{72} \overline{(U^2 + V^2)} \Delta x^4$$

这表明如果只考虑由有限差分离散产生的数值计算噪音的阻尼,那么必须使用高阶扩散公式。

这里值得注意的是,在用一般垂直坐标

考虑地形的模式中,水平扩散在粗糙地形中通常得不到正确表述。所造成的损害当扩散比较小时可以忽略,否则其损害非常重要。还应注意到,前一节中描述的半球积分包含了地形并且注意到总的评分得到了改善(虽然在山区变糟了)。可以相信,在近山区由于山的影响集中在最短波部分(占一个很窄的谱区),高阶扩散公式存在的问题要少些。

水平扩散的隐式公式应用最好的实例是全球格点模式。在一个规则球面网格点上,经向方向的格距由赤道的 300km 减小到距极地 300km 处的 14.2km,在这样的网格点上,隐式公式变得非常必要。

6 结论

前几节中用于格点模式的隐式水平扩散运行良好,它对于稍微大的扩散系数 γ 保持稳定,这在模式在非常细的网格点上用大的时间步长积分时是有用的。对于选择的实例,试验结果进一步证明扩散量随时间增加。扩散随时间呈线性增加是有根据的。

在 48 小时预报中, γ 的建议值对应于 350km 的均方根位移误差。在 LFM-I 模式中,相应的位移误差为 432km,在现在使用的一些最好模式中,强气旋的位移误差可能要小于 400km,但都大于 300km,这说明给出的 γ 值是合理的。

如果使用较大的扩散系数 γ ,那么显式扩散变得不再稳定,这将和在模式网格的一部分上使用太小的格距发生同样的问题,小格距发生在全球网格上近极地的经向上,在这样的模式中使用水平扩散的隐式公式是可取的,它已在谱模式中使用。数值技术容许在全球网格点模式中建立大致类似的公式。在前几节给出了公认的隐式公式,运行良好,其扩散系数至少要比在一般大气模式中所用的扩散系数大一个量级。

朱玉强译自《Monthly Weather Review》
1992, No. 1 苗峻峰、皇甫雪官校