# 用伴随模式方程组优化飓风路径预报模式

M. DeMaria　R. W. Jones

**摘要**　模式拟合方法或“伴随方法”在一个正压飓风路径预报模式中做了检验。在同化时段的开始对涡度场加以调整，以使耗损函数达到极小值，后者定义为模式涡度与一系列间隔为 12 小时的分析涡度的差的平方。在使耗损函数极小化以后，模式涡旋在同化时段内紧沿着观测到的风暴路径而行，表明过去的风暴路径的信息正包含在模式解之中。使用这一同化方法作的路径预报与用该同化时段结束时刻单一分析对模式初始化的控制预报作了比较。对飓风 Hugo(1989)的 18 次序列预报的结果表明采用 12 小时同化时段，48 小时以内的平均路径预报误差均小于相应的控制预报误差。采用 24 小时同化时段的预报误差要大于 12 小时同化时段的误差。

由 Derber 所述的即把一个使耗损函数极小化的强迫项加到涡度方程中的方法被用来延长同化时段。强迫函数在涡旋附近有非常局地化的极值，因为涡旋尺度和涡旋在同化时段内移动的距离相当。这种局地化强迫作用影响随后的预报时段内风暴移动。如果在同化时段开始时首先对涡度加以调整，则该局地化强迫作用的幅度变小，然后加入强迫项以使耗损函数进一步变小。当采用这种组合方法时，在 72 小时以内平均路径误差小于控制模拟的误差。

**关键词**　飓风，耗损函数，同化技术，样条分析

## 1　引言

限制热带气旋路径预报准确度的一个重要因素是海上观测资料缺乏（Neumann，1985）。四维资料同化技术通过包括延伸时段内的观测资料可以部分地补偿这种资料空间

覆盖不足。近几年倍受重视的同化技术是模式拟合方法或“伴随方法”(Lewis 和 Derber，1985；Talagrand 和 Courtier，1987；Thacker 和 Long，1988)。这一方法的基本思路是通过求数值预报模式对某一时段观测资料的最小平方拟合解的方式对资料加以同化。在本文中使用一个正压的路径预报模式对伴随方法在飓风路径预报上的可应用性加以研究。

正压模式用于业务数值天气预报始于五十年代后期(Shuman，1989)，但后来转向于更全面和更有技巧的斜压模式。但是，DeMaria 等(1992)已经证明热带气旋路径的正压预报在 48 小时以内具有与斜压模式相同的技巧。正压模式预报之所以具有这样技巧是由于热带气旋形成于低纬度和风垂直切变较小的环境中(Gray，1968)，因此，斜压过程在风暴附近并不那么重要。这样，尽管我们为了简单起见选用了正压模式，本研究对热带气旋路径的业务预报仍是恰当的。

海上资料覆盖通常不足以确定热带气旋环流。大多数业务路径预报模式在风暴附近包含合成或仿造的观测资料以便解决这一问题(Mathur，1991)。在一个成熟热带气旋附近，风的对称(方位角平均)部分通常比非对称部分大得多。气流的对称部分的合成观测资料能够从给定某些诸如最低地面气压和风暴大小等基本风暴参数的热带气旋的气候结构得出。但是风暴的初始移动由非对称气流决定(例如 Fiorino 和 Elsberry，1989)。非对称气流具有更多变的结构，但通常是以一种简单方式计入。例如在业务正压模式 SANBAR 中，非对称气流是由代表现时风暴运动的不变矢量所确定的(Sanders 等，1975)。

本研究旨在确定能否通过资料同化技术把一段时间的信息结合进去来改善路径预报，实际的和合成的观测资料都加以考虑。如果把包括几个风暴位置的合成观测资料用于同化过程，模式对于这些观测资料的拟合可以确定一种比得出合成观测资料时所假定的更接近实际结构的非对称环流。

## 2 预报模式

本文使用的热带气旋路径预报模式是由麦卡托投影下的平衡正压涡度方程所控制，它可以写成

$$\frac{\partial P}{\partial t} + m\left(u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \beta v = \lambda m^2 \nabla^2 P + \Phi \tag{2.1}$$

其中

$$P = (m^2\nabla^2 - \gamma^2)\psi \tag{2.2}$$

$$u = -m\frac{\partial \psi}{\partial y};\ v = m\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.3}$$

$$\beta = \frac{2\Omega\cos\theta}{a} \tag{2.4}$$

$$m = \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta} \tag{2.5}$$

在(2.1)到(2.5)中，$P$ 是位涡，$\psi$ 是流函数，$m$ 是地图因子，$\theta$ 为纬度，$\theta_0$为麦卡托投影的参考(真)纬度，$a$ 是地球半径，$\Omega$ 是地球角速度，$\lambda$ 为水平扩散系数，$\gamma$ 是罗斯贝变形半径(假定是常数)的倒数，$\Phi(x,y,,t)$是任意强迫作用项。其他变量的意义与常见的相同。

方程(2.1)—(2.5)用二阶空间和时间有限差分求解，格点由下式定义

$$x_i = i\triangle x, i = 0,1,2,\cdots I \tag{2.6a}$$

$$y_j = j\triangle y, j = 0,1,2,\cdots J \tag{2.6b}$$

$$t_n = n\triangle t, n = 0,1,2,\cdots N \tag{2.6c}$$

涡度方程(2.1)中的平流项用 Arakawa (1966)的二阶雅可比来计算，其他项则用中心差分。模式时间积分采用二阶 Adams-Bashforth 时间差分方案。这一时间差分方案是弱不稳定的，但在实际应用中并没有发生问题。在边界的流入点上位涡是规定的，而在流出点上用单侧空间差分来预报位涡值。全部边界上流函数是规定的。

椭圆方程(2.2)在每一时步用一种多格点算法(Fulton 等，1986)求解。这一算法在其粗网格上分辨率下降到一半的一系列格点上使用超松弛(overrelaxation)方法。在模式格点和另外4个粗网格点上使用了一个简单的 V 循环算法。

模式方程组在96×80格点和格距为100公里的模式域上求解。在每次飓风路径预报中，积分域的中心大致位于风暴初始经纬度上。参考纬度 $\theta_0$为20°N。每次预报，模式采用600秒的时间步长积分至72小时。

其余模式参数为水平扩散系数 $\lambda$，罗斯贝变形半径的倒数 $\gamma$ 和强迫项 $\Phi$，$\lambda$ 值采用 $10^4 m^2s^{-1}$，$\gamma^{-1}$为800千米。强迫项 $\Phi$ 仅在部分同化步骤中使用，将在第3小节加以描述。$\lambda$ 的值难以在物理基础上加以确定，选用此值是为了使风暴环流尺度(500公里)的涡度不致于衰减太快。罗斯贝半径可解释为 $c/f$，其中 $c$ 是重力波速，$f$ 是科里奥利参数。对层结大气中第一内垂直模来说，$c$ 大约是50m/s。以此 $c$ 值，在26°N(所有预报个例中风暴平均纬度)罗斯贝半径大约为800千米。

同化试验的分析场取自 DeMaria 等(1992)所描述的为一个试验性业务路径预报模式(VICBAR)所准备的风场分析。850、700、500和200hPa 的水平风场分量用由 Lord 和 Franklin(1987)所述的三次样条分析算法进行分析。用于样条分析的观测资料包括探空、卫星云迹风和美国空军以及国家海洋大气局可利用的飞机侦察资料。国家气象中心的区域分析用作样条分析的背景场。合成观测资料也包括在内，用以代表风暴环流。合成风从两个方面加以确定的，一是代表轴对称涡旋的风暴平均切向风，另一是一个代表风暴起始时刻运动的常矢量。在飓风中心附近600公里之内包括了合成观测资料。对样条分析在垂直方向上加以(质量权重)平均以便给出深厚层次平均值。

正压模式中涡旋路径对涡旋中心附近200—300千米以内的涡旋对称部分的结构不是很敏感(DeMaria，1985)。因为不需要分辨涡旋内核部分，样条分析在飓风中心附近包括了一个半振幅波长(滤波器响应为0.5的波长)为4个纬度的低通空间滤波器。这一平滑使该正压模式能以100千米格距进行运算。没有这种平滑，则需要一个细得多的网格分辨率来表达热带气旋环流。

应该指出该样条分析方法是为常规正压模式提供初始条件而研制的。在本研究中，目的是确定使用一个更为精细的资料同化程序把几个分析结合起来是否能获得比寻常多的预报技巧。在某种程度上说，结果将取决于最初样条分析的性质。

由样条分析得来的风分量内插到该正压模式的网格点上。为确定风的无辐散部分要先解一个求速度势(边界上为零)的泊松方程。然后从总的风中减去辐散风(由速度势确定)。流函数的边界条件通过积分沿边界的无辐散风的垂直分量加以计算。在上述计算以后，对边界流函数进行线性调整以保证其连续性(当沿边界积分时，终结点上的流函数通常不等于起始点上的流函数)。然后，由泊松方程解出区域内格点上的流函数值。确定流函数的这一步骤与 Lynch(1989)所提出的相似。

在计算出流函数之后，模式作时间积分。预报的路径由合成涡旋的位涡最大值的位置决定。这个位置的确定首先是找出具有最大位涡的模式格点，然后利用该点及其邻近8点的位涡值，用“质量中心”方法加以确定风暴中心的位置。初始涡旋位置可准确到约10公里以内，通过把由模式格点的估计位置和在样条分析中用于得出合成观测资料的位置加以比较可确定此准确程度。

合成观测资料的生成与业务估计的风暴中心有关。但是路径预报的验证将使用由国家飓风中心根据飓风季节后所有可用的观测资料所确定的最佳飓风路径。业务初始位置误差(相对于最佳路径)通常小于20千米，但在少数情况下，可大到150千米。

对1989年大西洋飓风季节的飓风 Dean、Erin、Felix、Gabrielle 和 Hugo 实施了预报的资料同化试验。所有这些风暴都达到了飓风强度以及至少有一次验证的72小时预报(风暴维持热带风暴强度至少有3天)。这些风暴每12小时(0000和1200世界协调时)有一次样

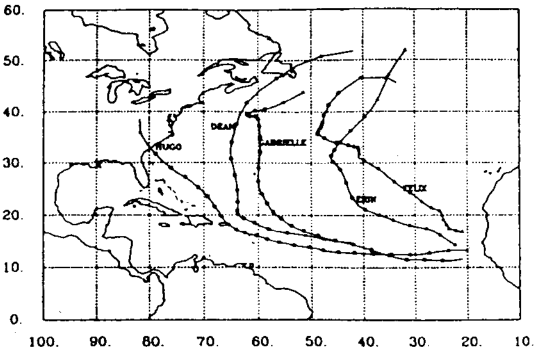


图1　在同化试验中所用的热带气旋路径。圆圈和三角形表示12小时间隔的风暴位置，且圆圈(三角形)表示在该时刻有(无)样条分析

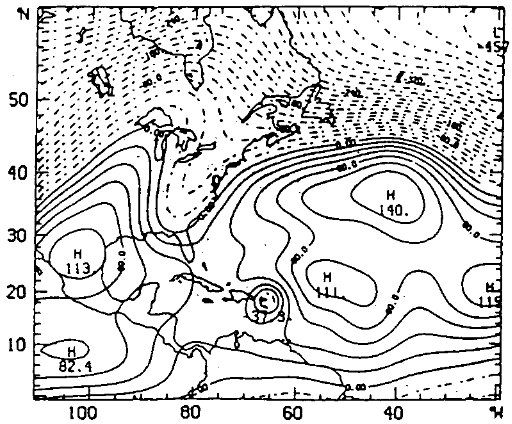


图2　1989年9月18日1200世界协调时飓风 Hugo 在模式区域内的流函数场($\times 10^5$米$^2$秒$^{-1}$)

条分析。图1给出了这些风暴的路径及其包括在同化试验中的路径段。图2表示模式域内流函数的一个例子。如流函数图上局地极小值所示，这时飓风 Hugo 位于18°N，66°W，并正以约5米/秒的速率向西北方向移动。

## 3　资料同化

资料同化过程基本思想是确定预报模式的一个解，它是对某一时段的观测资料的最佳拟合。然后该最佳模式解可以延伸至未来从而提供预报。模式对于观测资料的拟合的质量是以耗损函数来度量的，该函数定义为观测值与模式的对应量之间差的平方和。在本研究中，同化时段内如模式涡旋并不沿着观测到的涡旋路径移动时，耗损函数大，这是合乎需要的。为此，把经从样条分析并插值到格点的位涡当作观测资料。位涡在风暴中心有大的峰值，因此，若模式涡旋和分析场的涡旋错位，模式场和分析场的差将是大的。

对于每一个风暴都有每12小时一次的风场分析。对于一个给定的预报时刻，将考虑12和24小时的同化时段，从而确定对于2或3个时次分析结果为最优拟合的模式解(本文中预报前的同化时段中时间为负，预报时段时间为正)。例如对24小时同化时段，模式预报制作将于预报时刻的前24小时开始。$t=-24$小时的模式初始条件将予以调整直到该耗损函数达到极小值，其中耗损函数度量了在$t=-24$，$-12$和0时的模式和分析场位涡之差。在这类同化方法中，模式方程是完全令人满意的，因此，该类方法称作强制约同化。

Derber(1989)描述了另一种资料同化方法，其中模式方程并不令人完全满意。这种方法对正压模式是适合的，因为在正压模式中模式方程并不能总是精确地代表大尺度气流的演变(尤其在中纬度)。对于这一方法，涡度方程(2.1)中加了一个强迫项 $\Phi$，那么，不是在同化时段开始就调整模式位涡，而是用确定 $\Phi$ 函数使耗损函数为极小。在预报期内($t=0$—72小时)，或令 $\Phi$ 为零或将 $\Phi$ 包括到预报中去。在更普遍情况下，$\Phi$ 可以是时间和空间的函数。但是为简单起见，我们假设 $\Phi$ 仅是 $x$ 和 $y$ 的函数。因为涡度方程并不完全令人满意，这类方法称作弱制约同化。

如 Thacker(1990)所述，先前的信息能融入到同化过程中去。例如，如果感到仅某些确凿的水平尺度需要通过同化加以弥补，一个罚项可以加到耗损函数中去，当模式解中包含小的水平尺度时罚项值变大。第2小节所述的正压预报模式使用了二阶精度的空间和时间导数，因此，波长小于4倍格距的场并不能精确的加以表示。由于这一精度的原因，从最佳拟合模式解中过滤掉小尺度是合理的。

为了包括这一选择，耗损函数 $C$ 由下式给出

$$C=\sum_{n=-N}^{0}\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}W_{ij}^{n}(P_{ij}^{n}-\bar{P}_{ij}^{n})^{2}+\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}\{\sigma[\triangle(P_{ij}^{-N}-\bar{P}_{ij}^{-N})]^{2}+\rho[\triangle\Phi_{ij}]^{2}\} \tag{3.1}$$

其中 $\bar{P}_{ij}^{n}$是由样条分析得出的模式格点上的位涡，$P_{ij}^{n}$是模式位涡，$W_{ij}^{n}$是任意权重，$\sigma$ 和 $\rho$ 是取定的常数，△是由下式定义的离散拉普拉斯算子

$$\triangle(f_{ij})=f_{i+1,j}+f_{i-1,j}+f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-4f_{ij} \tag{3.2}$$

(3.1)式中下标 $i,j$ 代表 $x$ 和 $y$ 方向，$n$ 表示时间层。在(3.1)式右边第一项中对 $n$ 求和仅包括有资料的那些时间层。因为我们使用间隔为12小时的分析场的位涡，对 $n$ 求和表示每12小时对耗损函数增加一个基值。方程(3.2)在模式域内点上是有效的。该算子的差分公式在边界点上仅应用于平行该边界的方向上。

(3.1)式右边第一项度量模式位涡和分析位涡之间的不适合。如 Courtier 和 Talagrand(1990)所述权重 $W_{ij}^{n}$可以是空间的函数(例如在风暴中心附近增加耗损函数值)或时间的函数。为简单起见，我们在所有同化处理中权重取1。

(3.1)式右边第二项是处罚同化时段(强制约)开始时刻位涡导数的项或强迫函数 $\Phi$(弱制约)。罚项过滤了小的水平尺度，滤波器的强度由参数 $\sigma$ 和 $\rho$ 控制。注意在(3.1)式中予以处罚的是在同化时段开始时刻分析和模式位涡的差而不是模式位涡本身。如果模式位涡被处罚，该同化过程将使涡旋附近的涡度变得平滑，因此同化开始时刻的涡旋将比同化时段其他时刻和预报时段中的弱。

对于一个给定的同化时段，我们希望在同化开始时刻就确定模式位涡场或使 $C$ 为极小值的强迫函数。在这两种情况下，所确定的场包括97×81格点(模式状态矢量长度为7857)。耗损函数的格点数是状态矢量长度的2(12小时同化)或3倍(24小时同化)，因此，耗损函数有唯一极小值是可能的。在下面讨论中，我们把注意力限于确定初始场位涡的强制约情形。

如果我们能确定相对于每个格点的初始位涡的耗损函数的导数，则可以使用迭代方法使耗损函数极小化。这些导数中每一个是耗损函数梯度的一个分量。该梯度可用拉格朗日乘子法加以确定。为此，把模式方程(2.1)和(2.2)的离散形式作为约束条件添加到耗损函数中以得出拉格朗日函数 $L$。每个离散形式方程有一个拉格朗日乘子。令 $L$ 对于拉格朗日乘子的导数为零，给出了必须向前作时间积分的离散形式的模式方程。令在全部模式格点上和全部时次(除了初始位涡外) $L$ 对于模式位涡和流函数的导数为零，则给出了拉格朗日乘子的伴随方程。伴随方程必须从同化时段结束时刻向开始时刻作后向时间积分。然后就可确定耗损函数对于初始位涡的梯度分量。

相应于(2.1)和(2.2)式离散形式的伴随方程的推导类似于 Thacker(1990)所描述的。但是，本文推广了 Thacker 的结果以便包括在路径预报模式中使用的地图因子，Adams-Bashforth 时间差分和特定的流入流出边界条件。伴随方程向后时间积分所需的计算与预报方程向前时间积分的计算一样。

一旦该梯度确定了，可以用共轭梯度算法使耗损函数极小化，令 $\nabla C$ 表示耗损函数的梯度，$\boldsymbol{P}$ 表示一个矢量，其分量是同化开始时刻所有模式格点上的位涡值。然后，作 $\boldsymbol{P}$ 的第一次猜测(以 $\boldsymbol{P}^{k}$ 表示)，向前积分模式至同化时段结束时刻，向后积分伴随模式至同化时段开始时刻，并计算 $\nabla C$ 值。然后使用下式调整 $\boldsymbol{P}^{k}$

$$\boldsymbol{P}^{k+1}=\boldsymbol{P}^{k}+\alpha^{k}\boldsymbol{D}^{k} \tag{3.3}$$

其中

$$\boldsymbol{D}^{k}=-\nabla C^{k}+\beta^{k}\boldsymbol{D}^{k} \tag{3.4}$$

$$\beta^{k}=\frac{\nabla C^{k}\cdot\nabla C^{k}}{\nabla C^{k-1}\cdot\nabla C^{k-1}} \tag{3.5}$$

$k$ 表示迭代次数，$\alpha^k$ 为步长。对第一次迭代可令 $\beta^k$ 为零。注意 $\nabla C$ 和 $\boldsymbol{P}$ 有相同量纲，因此步长 $\alpha$ 是无量纲的。

由(3.4)式定义的下降方向是在共轭梯度极小化中使用的标准方向。共轭梯度极小化理论表明，如果对步长 $\alpha^k$ 加以选择从而使得该泛函在每一次新下降方向计算后达到极小化，那么一个二次泛函能在有限次迭代中极小化(例如 Fletcher，1987)。Courtier 和 Talagrand(1987)已证明在正压模式同化试验中对一个固定的下降方向来说耗损函数随步长的变化接近于二次函数关系。正如下面所述，作为 $\alpha$ 的函数的 C 的二次变化用来确定(3.3)式中的 $\alpha^k$。

首先选用一个试验性的步长，$\alpha_t$ 来估计步长。用(3.3)式调整位涡，用试验步($C^{k+1}$)向前积分模式以估算耗损函数。假定对某一给定下降方向 $\boldsymbol{D}^k$ 耗损函数是 $\alpha$ 的二次函数，这样

$$C = a + b\alpha + c\alpha^2 \tag{3.6}$$

给出在试验步之前(在 $\alpha=0$)的耗损函数和下降方向以及试验步后(在 $\alpha=\alpha_t$)的耗损函数，则常数 $a$、$b$、$c$ 就可以求出。然后令(3.6)式中 $dc/d\alpha=0$并求出 $\alpha$ 从而提供了一个固定下降方向的最优步长的估计。采用这一方法，$\alpha^k$ 由下式给出

$$\alpha^k = \frac{\alpha_t^2(\nabla C^k \cdot \boldsymbol{D}^k)}{2[(C^k - C^{k+1}) + \alpha_t(\nabla C^k \cdot \boldsymbol{D}^k)]} \tag{3.7}$$

采用这一算法，每次迭代需要对向前模式作两次积分(一次用试验步，一次用由(3.7)式确定的 $\alpha^k$)以及对向后模式作一次积分以更新梯度。模式使用的经验表明，每次迭代后步长趋于减小。为此，令试验步长为前次最优步长的0.8倍。对于首次迭代，步长采用0.01。

共轭梯度迭代一直继续到耗损函数值的变化小于前次迭代中耗损函数值的5%。模式试验表明：当收敛判据满足以后，继续迭代时耗损函数实质上维持常值。对12小时的同化时段，该算法一般少于15次迭代即可收敛，对于24小时同化30次迭代就够了。

弱制约情况下的同化过程，除了在(3.3)—(3.7)式中 $\boldsymbol{P}$ 由一个其分量为全部模式格点上的强迫函数 $\Phi$ 的矢量所代替以及 $\nabla C$ 的分量是每一格点上 C 对于 $\Phi$ 的导数以外，相似于上面描述的强制约同化过程。在确定弱制约和强制约时的 $\nabla C$ 中，尽管梯度在每种情况下是拉格朗日乘子的不同函数，都使用了同一伴随方程(Derber，1989)。因为在弱制约情况下 $\Phi$ 的量纲为 $T^{-2}$，以及 $\nabla C$ 是无量纲的，步长 $\alpha$ 有 $T^{-2}$的量纲。为了说明不同量纲，对于弱制约情况，$\alpha$ 用$2.0\times10^{-9}$秒$^{-2}$加以度量。尺度因子的这个特定值是从模式试验中加以确定的，不管怎样，尺度因子这个值相应于约6小时的时间尺度，这对我们模式来说是合理的。

## 4 飓风 Hugo 的预报结果*

## 5 其他预报例子(略)

## 6 小结与评论

在一个正压飓风路径预报模式中试验了模式拟合方法或“伴随方法”。对同化时段开始时刻的模式涡度场进行调整以使耗损函数极小化，该耗损函数定义为模式涡度与一连串间隔为12小时的分析涡度差的平方。分析中使用了实际观测值和代表风暴环流的“合成”观测值。在耗损函数达到最小值以后，模式涡旋在同化时段内紧随着观测到的风暴路径移动，这表明关于风暴过去路径的信息正包含在模式解之中。经过同化处理的路径预报与在同化时段结束时刻的单一分析场作初值的控制预报作了比较。结果表明采用12小时同化时段(模式拟合连续两个分析场)，路径预报误差在48小时以内通常比控制预报要小。采用24小时同化时段的预报误差比采用12小时同化时段的误差要大。采用较长同化

* 由于篇幅缘故，将此节和下一节略去——编者

时段而路径预报没有改进可能是由于正压预报模式的不准确性引起的。

本文应用了 Derber(1989)的模式方程不必精确满足的方法以设法延长同化时段的长度。在该方法中,涡度方程中增加了一个强迫作用项。然后,强迫项以一种使耗损函数为极小值的方法来加以确定,而不是在同化时段开始时刻对涡度加以调整。在模式预报时段,既可令强迫项为零,也可以保留强迫项。这一方法对路径预报并不是很有用的,因为涡旋的尺度与在同化时段内涡旋所移动的距离差不多。这一特点导致强迫函数在风暴附近具有很局部的极值。如果在预报时段内保留强迫项,它会干预随后的风暴移动。如果在预报时段去掉强迫项,那末某些有关风暴前期路径的信息就损失掉了。

我们研制了一个新的方法,在该方法中同化时段的开始时刻对涡度加以调整,以迫使涡旋在同化时段内沿着观测到的路径移动。然后,加上强迫项以进一步使耗损函数减小。这一组合方法使得采用 24 小时同化时段的路径预报相对于控制模拟有一定改善。

本文也给出了同化过程使控制预报退化的个例。这种退化似乎与风暴位置的业务估计的误差和在分析中使用的第一猜测场不好有关系。同化过程从分析场的时间演变提供了附加的信息,但是在风暴附近的额外信息的误差很大。这一结果表明如果把该方法应用于业务模式,需要多加小心。这一方法可能不适用于弱风暴情况,在那种情况下风暴中心初始位置不确定性较大。本文所用正压模式包含两个规定参数——水平扩散系数和罗斯贝变形半径。原则上说,这些参数也能作为同化过程的一部分加以确定(例如 Tziperman 和 Thacker,1989)。但是,由于在耗损函数中的模式参数和位涡的值不同,在这些参数能作为同化过程的一部分而加以复原以前,必须对模式方程细致地进行量纲分析。在正压路径预报模式背景下的参数估计的研究正在进行之中。

**陆曼云和朱复成译自 *Monthly Weather Review*,1993,*Vol.* 121, *No.* 6 1730—1744**

**董克勤校**