

有效总能量平衡方程及其它

辜旭赞 冯树常 方慈安

(湖南省气象局,长沙,41007)

摘要 作者在定义了单位质量气块(空气元)的有效总位能的概念基础上,采用空气元的观点又推导了有效总能量的数学表达式,导出了形式上与 Bernonlli 方程(总能量平衡方程)完全相同的有效总能量平衡方程。此外,还推导了有效总能量收支方程。并就一些可能应用的问题进行了讨论。

关键词 有效总能量 有效总位能 能量平衡方程

1 引言

地球大气中的能源和能量转换问题,特

别是从广义上去理解它时是地球科学中最重要的问题之一。

文献[1]指出,从能量的观点来研究大气

运动规律就是把大气看成包含各种形式能量的一个闭合系统,然后根据能量守恒原理,只要知道其起始和终止状态的能量分布,便可确定终止状态的大气运动状况。大气中各种天气系统的产生、发展和消亡的过程就是能量的积累、释放和转换的过程。所以大气能量的研究对于揭露大气运动的本质,特别是了解大气环流的规律有着十分重要的意义。

在大气中除辐射能外,研究最多的是内能、位能、动能、潜热能和压力能五种形式的能量,其中把内能与位能之和称之为全位能,而把内能、位能、动能、潜热能和压力能之和称之为总能量。不少人^[2-4]应用这些概念,讨论了全位能与动能的转换关系及系统的能量平衡关系,得出许多有益结论。我们认为这些概念还不能全部描述各种能量关系。因此,有必要引进一些新的能量概念。

Lorenz 将大气参考状态定义为:大气实际状态在任一时刻 t 对应的一个经理想绝热过程达到大气垂直和水平稳定(位温 θ 在垂直方向上调整到单调上升且 θ 平面在水平方向上均一)状态,即大气参考状态是 t 和 θ 的二元函数^[5]。绝热时因位温保守, θ 面上的参考气压值将不会变化,也就是说大气参考状态具有保守性;非绝热时 θ 面上可有受热空气的质量通量,该 θ 面上便会出现参考气压值的“脉动”,因而这时的大气参考状态也可以有“脉动”。不过由于整个大气的质量守恒和热平衡,因此可以说大气参考状态仍具有准守恒性^[7]。大气在实际运动过程中对其相对不变的大气参考状态而言,总是有能量偏差的。我们可用这种广义的能量偏差来定义有效总位能和有效总能量。这便是我们的“空气元”观点。对不断移动变化的天气系统和大气环流来说,最好采用这种“空气元”观点来研究它。下面本文试图用“气块”的位温 θ 作为标记来探讨其相应的能量、有效能量及转换问题。

2 总位能和有效总位能

2.1 总位能 P^*

空气元的全位能 P 为:

$$P = C_p T + gZ \quad (1)$$

空气元的压力能变率:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(p\alpha) = p \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial t} \\ + \alpha(\vec{V} \cdot \nabla p + w \frac{\partial p}{\partial Z}) \end{aligned} \quad (2)$$

事实上,由于压力能 $p\alpha (=RT)$ 与内能 $C_p T$ 在大气中是不可分的,因此,有必要引进总位能概念,以区别于全位能:

$$P^* = C_p T + gZ \quad (3)$$

总位能即干静力能。本文的目的是,后面还要定义有效总位能,以区别于有效(全)位能。

另外,干空气元的总能量定义为

$$\begin{aligned} E_A = C_p T + gZ + \frac{1}{2} V^2 + p\alpha \\ = C_p T + gZ + \frac{1}{2} V^2 \end{aligned} \quad (4)$$

2.2 有效总位能 P_A

同全位能一样,总位能并非都能自动有效地转变为动能。其中只有一小部分有效总位能可以释放。为了与有效位能概念相区别,我们这里特定义有效总位能。

有效总位能是通过比较气块(其本身)的参考状态来描述。即可设 t 时刻空气元的实际状态 (P, T, Z) , 则其位温 θ 还同时唯一决定它在大气中的参考状态 $(P_r(\theta, t), T_r(\theta, t), Z_r(\theta, t))$ 。(为了便于书写,以下将略去 t 不写)。

我们知道,干空气元的总能量平衡方程^[1],即 Bernonlli 方程为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(C_p T + gz + \frac{1}{2} V^2) \\ = \tilde{Q} + \alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial V_j \tau_{ij}}{\partial X_j} \end{aligned} \quad (5)$$

式中 V 为全风速, V_j 为速度张量, τ_{ij} 为

空气分子粘性应力张量, \bar{Q} 为空气元非绝热加热率, 其它为气象上常用符号。(5)表明, 干空气元总能量的变化取决于非绝热加热率、气压场非定常变化及分子粘性作用。

如空气元运动过程是绝热、定常、无摩擦的, 则由(5)(这时其右边三项均为零)可得其到达参考状态 $(P_r(\theta), T_r(\theta), Z_r(\theta))$ 和具有假设速度 $V_r(\theta)$ 时的有效总位能 P_A , 即可以转化为动能的那部分总位能:

$$P_A \equiv \frac{1}{2}(V_r^2(\theta) - V^2)$$

$$= C_p(T - T_r(\theta)) + g(Z - Z_r(\theta)) \quad (6)$$

由(6)可以看出, 总位能与动能的转换包含有压力能。我们这里定义的有效总位能已包括了压力能。

类似地由(5), 我们把空气元先经假绝热、定常、无摩擦运动达到水汽全部凝结完的某个高度, 然后再经绝热、定常、无摩擦运动回到其参考状态 $(P_r(\theta_w), T_r(\theta_w), Z_r(\theta_w))$ 时的假相当有效总位能, 它与潜热能之和可称之为湿有效能量 $P_{A_{mk}}$ 。容易推得:

$$P_{A_{mk}} = \frac{1}{2}(V_r^2(\theta_w) - V^2)$$

$$= C_p(T - T_r(\theta_w)) + g(Z - Z_r(\theta_w)) + Lq \quad (7)$$

文献[4]曾指出, 位温面上总位能的分布即是 Montgomery 流函数。所以, Lorenz 关于“大气系统中有效位能与动能之间转换”乃是一般的笼统概念^[2], 并不能描述具体气块在运动过程中所发生的能量变化。需要指出的是, 这种观点认为有效位能只与温度(内能)及位能有关——当且仅当流体为液态时这个结论才能正确——实际上, 正如前述, 对气态流体, 它还与压力能有关。我们这里定义的所谓“有效”能量, 都是空气元实实在在可转化为动能的量。(6)、(7)两式明确表明, 有效总位能不仅与焓有关, 而且还与其所在高度即位能有关(假相当过程还与凝结潜热有关)。这不仅更接近实际, 而且更有助于对天气系统各部分的能量变化进行定量比较。可以认

为, 有效总位能向动能的转化, 除了焓发生作用外, 还有位能的作用和假绝热时的潜热能作用, 而 Lorenz 的有效位能概念只是它在 $Z - Z_r(\theta) = 0$ 时的一个特例。

3 总能量平衡方程和有效总能量平衡方程

3.1 总能量平衡方程

干空气元的总能量平衡方程已如前述的(5)式, 这里不再赘述。现在来推导有效总能量平衡方程。

3.2 有效总能量平衡方程

由于参考状态(如 $(P_r(\theta, t), T_r(\theta, t), Z_r(\theta, t))$)是 (θ, t) 的二元函数, 所以空气元参考气压的个别变率为

$$\frac{dP_r}{dt} = \left(\frac{\partial P_r}{\partial t}\right)_\theta + \frac{\partial P_r}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (8)$$

(8)右端第一项表明, 气块的参考气压将随其所在位温面参考气压的变化而变化, 不过正如前述, 这种变化属“脉动”偏离, 正负数值不大。右端第二项表明它还与其本身的位温变率有关: 非绝热时若气块位温变大(小)则其本身的参考“位置”将上升(下降), 而该项中的 $\frac{\partial P_r}{\partial \theta}$ 是与水平方向无关的大气参考状态层结。

空气元有一参考位势高度 $Z_r(\theta, t)$, 其参考位能变率为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(gZ_r(\theta, t)) &= g\left[\left(\frac{\partial Z_r}{\partial t}\right)_\theta + \frac{\partial Z_r}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}\right] \\ &= g \frac{\partial Z_r}{\partial P_r} \left[\left(\frac{\partial P_r}{\partial t}\right)_\theta + \frac{\partial P_r}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}\right] \\ &= -\alpha_r \frac{dP_r}{dt} \quad (9) \end{aligned}$$

空气元有一参考温度 $T_r(\theta, t)$, 其参考焓变率为:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(C_p T_r(\theta, t)) &= C_p \frac{d}{dt}(\theta_r P_r^k P_0^{-k}) \\ &= C_p (P_r^k P_0^{-k} \frac{d\theta_r}{dt} + \theta_r P_0^{-k} \cdot k P_r^{k-1} \frac{dP_r}{dt}) \\ &= C_p P_r^k P_0^{-k} \frac{d\theta_r}{dt} + \alpha_r \frac{dP_r}{dt} \quad (10) \end{aligned}$$

式中 $k = \frac{R}{C_p}$ 。(9)+(10), 有:

$$\frac{d}{dt}(C_p T_r + gZ_r) = C_p \left(\frac{P_r}{P_0}\right)^k \frac{d\theta_r}{dt} \quad (11)$$

这里也进一步证明了在非绝热时空气元的参考焓与参考位能也有相互转换。

考虑到前述大气参考状态的定义, 即气块位温 θ 有

$$\theta = \theta_r = T_r \left(\frac{P_0}{P_r}\right)^k = T \left(\frac{P_0}{P}\right)^k \quad (12)$$

所以, (11) 可变成

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(C_p T_r + gZ_r) &= C_p \left(\frac{P_r}{P_0}\right)^k \frac{d\theta}{dt} \\ &= \left(\frac{P_r}{P}\right)^k \bar{Q} \end{aligned} \quad (13)$$

并以(5)减(13)式, 便得到:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\mathcal{A}}}{dt} &= \frac{d}{dt}[C_p(T - T_r) \\ &\quad + g(Z - Z_r) + \frac{1}{2}V^2] \\ &= N\bar{Q} + \alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial V_j T_{ij}}{\partial X_i} \end{aligned} \quad (14)$$

此即为干空气元有效总能量平衡方程, 其中

$$N = 1 - \left(\frac{P_r}{P}\right)^k = 1 - \frac{T_r}{T} \quad (15)$$

为热效率因子, 它在形式上虽然与 Lorenz 非绝热效率因子完全一样, 但那里的 N 不能精确描述非绝热产生有效位能的变率^[7], 而这里的 N 则精确表示非绝热产生空气元有效总位能的变率。

比较(5)和(14)不难发现, 两式在形式上几乎是一样的, 但两者是有本质区别的: (5)只表示空气元总位能可向动能转换; (14)不仅表示空气元有效总位能可向动能转换, 而且表明了相对于其参考状态的有效总位能实际可能转换量。另外, 前者在能量转换过程中不涉及非绝热效率因子, 后者则包含有非绝热效率因子。由(15)知, 只要知道空气元的参考状态, 便知道了它的热转换效率。这些都有利于对天气系统作出定量的能量分析以预报其发展消亡趋势, 因而有实用价值。

4 有效总能量收支方程

为了讨论天气系统的发生发展, 我们不仅要知道空气元的有效总能量, 而且要知道该天气系统范围(一定区域)内有效总能量的收支情况。为此, 我们来推导 $E_{\mathcal{A}}$ 的收支方程。

应用 P 坐标中的连续方程, 结合任一标量 A 的全微分表达式, 我们不难得到:

$$\frac{dA}{dt} \equiv \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}A) + \frac{\partial \omega A}{\partial p} \quad (16)$$

式中 ω 为 P 坐标中垂直速度, 其它均是常用符号, 对于区域面积为 S , 面元为 $d\sigma$ 而言, 应有

$$\begin{aligned} \int_S \frac{dA}{dt} d\sigma &= \int_S \frac{\partial A}{\partial t} d\sigma \\ &\quad + \int_S \nabla \cdot (\vec{V}A) d\sigma + \int_S \frac{\partial \omega A}{\partial p} d\sigma \end{aligned} \quad (17)$$

据此, 可将(14)写成面积分形式(记 $\int_S(\quad) d\sigma \triangleq \int(\quad)$):

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial E_{\mathcal{A}}}{\partial t} &= \int N\bar{Q} + \int \alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \int \alpha \frac{\partial V_j T_{ij}}{\partial X_i} \\ &\quad - \int \nabla \cdot [C_p(T - T_r) + g(Z - Z_r) + \frac{1}{2}V^2] \vec{V} \\ &\quad - \int \frac{\partial}{\partial p} [C_p(T - T_r) + g(Z - Z_r) + \frac{1}{2}V^2] \omega \end{aligned} \quad (18)$$

它就是区域 S 中的有效总能量收支方程。可以看出, 引起一定区域范围内有效总能量收支的有非绝热加热、气压局地变化、分子粘性作用及有效总能量与水平速度乘积的散度项和有效总能量与 ω 乘积在 P 方向的变化等原因引起。这些量除 $\frac{\partial p}{\partial t}$ 较难准确计算外都能计算, 而且都能就不同等压面分层计算。这样, 不仅能知道能量的水平收支, 还能知道能量收支的垂直变化和结构。可用于研究能量收支在天气系统发生发展中的作用, 有助于预报这类天气系统。若运动是绝热、定常(如取等压面)、无摩擦的, 由(18)知其能量收支主要取决于最后两项; 若运动设为假绝热, 还可以令 $\bar{Q} = L \frac{dq}{dt}$, 从而计算热效率项。

5 小结

综上所述,我们可以得出如下几点结论:

1、对大气而言,“全球大气(或闭合大气系统)内能、位能、动能之和守恒”^[8]是正确的,而“在定常条件下,气块(或气团)的内能、压力能(它们之和为焓)、位能、动能之和守恒”^[1]也是正确的。即空气元内向动能的转换除包括内能和位能(称为全位能)外,还应包括压力能。为此,我们定义了总位能(全位能与压力能之和)以区别于全位能概念。并用空气元观点探讨了有效总位能及其变率问题,这应代替过去有关的有效位能及其变化问题。

2、大气焓的变率与压力做功、动能变化和气压的局地变化三项有关,它们间的转换关系是与前两者为可逆的,但与第三者一般是不可逆的,这反映出气块在运动中对环境大气环流的响应,不仅仅摩擦项是不可逆的。

3、Lorenz 定义的有效位能是指闭合系统(空间)的全位能与按绝热调整后该系统(空间)所具有的最小全位能之差,如表示的是某气柱在大气参考状态比较下对全球大气有效能量的一种贡献;我们定义的有效总位能是指空气元(或气团)总位能与它在大气参考状态中最小总位能之差,且是可能转换成其动能的量。

4、有效总位能向动能的转化除了焓变外,还有位能的作用及假绝热时的潜热能的

作用。Lorenz 的有效位能概念只是气块在 $Z - Z_c(\theta) = 0$ 时的一个特例。(6)和(7)两式是精确的、物理意义明确的气块能量诊断方程。

5、导得的气块有效总能量平衡在形式上与干空气块的能量平衡方程完全相似,所不同的,前者表示的是有效总能量向动能的转换,后者表示的是总位能向动能的转换;另一个差别是前者有非绝热效率因子 N , 后者则没有。

6、导得的有效总能量收支方程,物理意义明确,可用于研究水平面中各项能量的大小、变化及垂直方向的变化与结构,以推断天气系统的发生发展,从而有利于预报它们。

参考文献

- 1 杨大升等. 动力气象学(修订本). 气象出版社, 1983, 117-119, 304-307
- 2 Lorenz E N. Available Potential Energy Maintenance of the General Circulation. *Tellus*, 1995, 7, 157-167
- 3 Smith P J. On the Contribution of a Limited Region to the Global Energy Budget. *Tellus*, 1969, 21, 202-207
- 4 冯树常. 论 Amk 预报方程及新的湿空气动力学方程组. *热带气象*, 1987, 3
- 5 辜旭赞. 地球大气参考状态实现的一个方案. *热带气象*, 1990, 1, 87-95
- 6 J. R. Holton. 空军气象学院训练部译. 动力气象学引论. 科学出版社, 1986, 59
- 7 辜旭赞. 有限区域有效位能理论再探. *气象学报*, 1990, 48, 248-252
- 8 张玉玲等. 数值天气预报. 科学出版社, 1986, 62-65