第 36 卷第 4 期
2008 年 8 月

气 象 科 技
METEOROLOGICAL SCIENCE AND TECHNOLOGY

Vol. 36, No. 4
Aug. 2008

# 气候变化研究中复 Hermite 矩阵解的统计和物理意义

彭茹　张小群

（中国气象局培训中心远程部，北京 100081）

**摘要**　复经验正交分析在气象学和海洋学研究领域有着广泛的应用，其核心部分就是求解复 Hermite 矩阵的特征值、复特征向量和复主成分。但是，在以往的研究中，并没有讨论复 Hermite 矩阵解的统计和物理意义。研究证明，复 Hermite 矩阵的特征值反映了方差贡献、异常能量，复特征向量本身并没有明确的物理意义，而有明确的统计意义。但是复主成分有清晰的物理意义，并且其实部和虚部不是独立的。因此，在研究二维矢量场变化的优势模态时，只能使用一维线性回归分析方法。

**关键词**　复经验正交分析　复 Hermite 矩阵　气候变化

## 引言

在气候变化研究领域，类似于经验正交分析方法（EOF）这样的传统的分析方法不能用于揭示二维风场变化的优势模态[1]。扩展的经验正交分析方法能够分析二维风场的变化，是因为它有一个假设的前提，即在相同空间格点上，风场的纬向和经向分量（$u$ 和 $v$）是互相独立的。此外，需要注意的是，扩展的经验正交分析方法人为地增加了空间格点数，相应地降低了主模态的方差贡献。实际上，同一空间格点的 $u$ 和 $v$ 并不是严格互相独立的。因此，严格地说，经验正交分析方法并不适合研究二维矢量场问题[1]。复经验正交分析方法（CEOF）通常用于揭示二维矢量风场变化的优势模态[2]，这里，我们主要介绍这种方法。为了提取二维风场变化的优势模态，我们利用风场构造一个复矩阵：

$$\boldsymbol{U}=[U_j(t)]=\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1N} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{P1} & U_{P2} & \cdots & U_{PN} \end{bmatrix}$$

$U_j(t)=u_j(t)+iv_j(t)$ ，$j=1,\cdots,P$；$t=1,\cdots,N$

这里，$j$ 表示空间位置，$t$ 代表时间，$u$ 和 $v$ 分别是异常风场的纬向和经向分量。其协方差矩阵为 $\boldsymbol{C}=\frac{1}{N}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^*$，其中 $\boldsymbol{U}^*$ 是 $\boldsymbol{U}$ 的转置共轭矩阵。因此，$\boldsymbol{C}$ 是一个复 Hermite 矩阵（$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^*$）。解该复 Hermite 矩阵，可以得到复特征向量和复主成分。复特征向量矩阵是：

$\boldsymbol{X}=[X_1(j)\quad X_2(j)\quad\cdots\quad X_P(j)]$，并且满足条件 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}$。

$$\text{复主成分矩阵：}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ \vdots \\ T_P(t) \end{bmatrix}$$

这里，$X_k(j)=XR_k(j)+iXI_k(j)$，$T_k(t)=TR_k(t)+iTI_k(t)$，$k=1,\cdots,P$（$P$ 是空间格点数）。$TR_k(t)$ 和 $TI_k(t)$ 只依赖于时间，与空间位置无关。特征值为 $\lambda_k$，$k=1,\cdots,P$，它表示给定模态的能量或者是方差贡献。

对应第一模态的风场异常可以写为：

$$R(j,t)=\sum_{k=1}^{1}X_k(j)T_k(t)=[XR_1(j)TR_1(t)-XI_1(j)TI_1(t)]+i[XR_1(j)TI_1(t)+XI_1(j)TR_1(t)]$$

由于 $XR_1$ 和 $XI_1$ 只与空间位置有关，因此，$TR_1$ 和 $TI_1$ 决定了对应第一模态的风场异常随时间的变化。这样，$TR_k(t)$ 和 $TI_k(t)$ 决定了对应第 $k$ 个模态的风场异常随时间的演变。第 $k$ 个模态振幅函数的空间分布可表示为：$S_k(j)=[X_k(j)X_k^*(j)]^{1/2}$，其中 $X_k{}^*(j)$ 是 $X_k(j)$ 的共轭。

---

作者简介：彭茹，女，1965 年生，高级工程师，主要从事数理统计、数据库管理工作，Email：pengr@cma.gov.cn

收稿日期：2007 年 4 月 13 日；定稿日期：2007 年 6 月 6 日

需要指出的是，这里介绍的方法不同于传统的复经验正交分析方法(Barnett 1983，彭茹和武炳义 1995)[3,4]，传统的复经验正交分析方法不是对二维矢量场而是对标量场进行的。该方法能够从气象要素场(标量场)的变化中识别出空间尺度的行波和驻波[3]。如彭茹和武炳义(1995)[4]利用传统的复经验正交分析方法，研究了 1982 和 1983 年夏季高层(300 hPa)和低层(850 hPa)风场的纬向分量 $u$ 的准双周振荡的传播特征。在该研究中，复时间序列的实部是 $u$ 分量，而虚部是 $u$ 分量的 Hilbert 变换，即

$$U_j(t)=u_j(t)+iv_j(t)$$

$$v_j(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}u_j(t-l)h(l)$$

当 $l\neq 0$ 时，$h(l)=\dfrac{2}{\pi l}\sin(\dfrac{\pi l}{2})$

当 $l=0$ 时，$h(l)=0$

在计算中，取 $l=7$ 即可有足够大的响应震荡(Barnett，1983)[3]。实际上，这是一个滤波过程，滤波前后序列 $u_j(t)$ 频率响应振幅大小为 1，相差为 $\pi/2$。因此，这一变换能够揭示出同一频率中位相为 $\pi/2$ 的振荡情况。

显然，本文以及武炳义(2006)[1]所介绍的方法与传统的复经验正交分析非常相似，唯一的不同之处是虚部是风场的 $v$ 分量，而且没有进行 Hilbert 变换。

实际上，这里所描述的方法与 Kaihatu 等[2](1998)所介绍的复经验正交分析方法(CEOF)相似。在 Kundu 和 Allen (1976)的研究之前[5]，通常单独地分析海洋环流的分量(经向流速和纬向流速)，经验正交分析是对流场的标量($u$ 和 $v$)进行的，分析结果不是耦合的标量。1976 年，Kundu 和 Allen 应用了复经验正交分析方法[5]，他们构造了复标量($u+iv$)，$u$ 和 $v$ 是矢量场的经、纬向分量。这里需要指出的是，对于任何一个选择 $u_j(t)+iv_j(t)$ 或 $v_j(t)+iu_j(t)$ 都不会影响最终的分析结果。

利用这种方法，武炳义等[1](2006)揭示了东亚冬季风(EAWM)变化的第一模态。该模态由两个截然不同的、交替出现的模态构成，或者是这两个模态的线性组合。武炳义等通过线性回归分析方法，对第一复主成分的实部和虚部分别进行线性回归，从中揭示出了这两个截然不同的模态。尽管复经验正交分析方法被广泛应用，但是以前的研究均未解释复 Hermite 矩阵的主成分和特征向量的统计和物理意义，尤其是复主成分的实部和虚部的关系仍然不清楚。在武炳义等的研究中，并未解释为什么分别对第一复主成分的实部和虚部进行线性回归分析。本研究的目的即是探讨这些问题。

## 1 复主成分和复特征向量与风场 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 分量的关系

用 $U_{ij}=u_{ij}+iv_{ij}$ ($\overline{U}_{ij}=u_{ij}-iv_{ij}$) 构造一个复矩阵(其中 $i$ 表示空间位置，$j$ 代表时间，$u_{ij}$ 和 $v_{ij}$ 表示异常)，本研究只选择两个空间点和两个时间观测，则

$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{U}^*=\begin{bmatrix}\overline{U}_{11} & \overline{U}_{21}\\ \overline{U}_{12} & \overline{U}_{22}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{U}^*$ 为 $\boldsymbol{U}$ 的转置共轭矩阵，协方差矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为：

$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{2}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^*$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}U_{11}\overline{U}_{11}+U_{12}\overline{U}_{12} & U_{11}\overline{U}_{21}+U_{12}\overline{U}_{22}\\ U_{21}\overline{U}_{11}+U_{22}\overline{U}_{12} & U_{21}\overline{U}_{21}+U_{22}\overline{U}_{22}\end{bmatrix} \tag{1}$$

其中：

$$U_{11}\overline{U}_{11}+U_{12}\overline{U}_{12}=u_{11}^2+v_{11}^2+u_{12}^2+v_{12}^2$$

$$U_{11}\overline{U}_{21}+U_{12}\overline{U}_{22}=$$
$$(u_{11}u_{21}+v_{11}v_{21}+u_{12}u_{22}+v_{12}v_{22})+$$
$$i(u_{21}v_{11}+u_{22}v_{12}-u_{11}v_{21}-u_{12}v_{22})$$

$$U_{21}\overline{U}_{11}+U_{22}\overline{U}_{12}=$$
$$(u_{21}u_{11}+v_{21}v_{11}+u_{22}u_{12}+v_{22}v_{12})-$$
$$i(u_{21}v_{11}+u_{22}v_{12}-u_{11}v_{21}-u_{12}v_{22})$$

$$U_{21}\overline{U}_{21}+U_{22}\overline{U}_{22}=u_{21}^2+v_{21}^2+u_{22}^2+v_{22}^2$$

这时，我们设：

$$\alpha=(u_{11}^2+v_{11}^2+u_{12}^2+v_{12}^2)/2$$
$$=(\sum_{k=1}^{2}u_{1k}^2+\sum_{k=1}^{2}v_{1k}^2)/2$$

$$\beta=(u_{21}^2+v_{21}^2+u_{22}^2+v_{22}^2)/2$$
$$=(\sum_{k=1}^{2}u_{2k}^2+\sum_{k=1}^{2}v_{2k}^2)/2$$

$$\gamma=(u_{11}u_{21}+v_{11}v_{21}+u_{12}u_{22}+v_{12}v_{22})/2$$
$$=(\sum_{k=1}^{2}u_{1k}u_{2k}+\sum_{k=1}^{2}v_{1k}v_{2k})/2$$

$$\delta=(u_{21}v_{11}+u_{22}v_{12}-u_{11}v_{21}-u_{12}v_{22})/2$$
$$=(\sum_{k=1}^{2}u_{2k}v_{1k}-\sum_{k=1}^{2}u_{1k}v_{2k})/2$$

则式(1)可以表示为：

$$C=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma+i\delta\\ \gamma-i\delta & \beta\end{bmatrix} \tag{2}$$

求得矩阵 $C$ 的特征值 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 分别为:

$$\lambda_1=\frac{(\alpha+\beta)+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4(\gamma^2+\delta^2)}}{2}$$

$$\lambda_2=\frac{(\alpha+\beta)-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4(\gamma^2+\delta^2)}}{2}$$

$CX_1=\lambda_1X_1$,这里 $X_1=\begin{bmatrix}X_1(1)\\X_2(2)\end{bmatrix}$ 是第一特征向量。

$$(\alpha-\lambda_1)X_1(1)+(\gamma+i\delta)X_1(2)=0$$

$$(\gamma-i\delta)X_1(1)+(\beta-\lambda_1)X_1(2)=0$$

我们记:

$$X_1(1)=1+i0=XR_1(1)+iXI_1(1)$$

$$X_1(2)=\frac{\lambda_1-\alpha}{(\gamma+i\delta)}=\frac{(\lambda_1-\alpha)\gamma}{(\gamma^2+\delta^2)}-i\frac{(\lambda_1-\alpha)\delta}{(\gamma^2+\delta^2)}=XR_1(2)+iXI_1(2)$$

由于两个复数相等时,其实部和虚部分别对应相等,则有:

$$XR_1(1)=1.0$$

$$XI_1(1)=0.0$$

$$XR_1(2)=\frac{(\lambda_1-\alpha)\gamma}{\gamma^2+\delta^2}$$

$$XI_1(2)=-\frac{(\lambda_1-\alpha)\delta}{\gamma^2+\delta^2}$$

由此得出,$XR_1(2)$ 和 $XI_1(2)$ 是无量纲量($u$ 和 $v$ 未被标准化处理,单位为 m/s)。对应的第一复主成分是:

$$T_1(1)=[u_{11}XR_1(1)+u_{21}XR_1(2)-v_{11}XI_1(1)-v_{21}XI_1(2)]+i[u_{11}XI_1(1)+u_{21}XI_1(2)+v_{11}XR_1(1)+v_{21}XR_1(2)]$$

$$T_1(2)=[u_{12}XR_1(1)+u_{22}XR_1(2)-v_{12}XI_1(1)-v_{22}XI_1(2)]+i[u_{12}XI_1(1)+u_{22}XI_1(2)+v_{12}XR_1(1)+v_{22}XR_1(2)]$$

## 2　复 Hermite 矩阵解的统计和物理意义

### 2.1　复 Hermite 矩阵解的统计意义

由以上分析可知,$\alpha$ 代表在第一空间点上 $u$ 和 $v$ 方差之和,$\beta$ 与 $\alpha$ 具有相同的统计意义,但 $\beta$ 是在第二个空间点上的方差之和。$\gamma$ 是 $u$、$v$ 在不同空间点的协方差之和,$\delta$ 是 $u$、$v$ 在不同空间点的协方差之差。实际上,对分析结果的解释,$\delta$ 有重要的统计意义。

如果 $\delta=0.0$,就意味着 $u$ 和 $v$ 在不同空间点上的协方差没有差异。这样,复 Hermite 矩阵 $C$ 简化为一个实对称矩阵,相应的特征值变为:

$$\lambda_1=\frac{(\alpha+\beta)+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{2}$$

$$\lambda_2=\frac{(\alpha+\beta)-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}}{2}$$

特征向量变为实数:

$$X_1(1)=1=XR_1(1)$$

$$X_1(2)=\frac{\lambda_1-\alpha}{\gamma}=XR_1(2)$$

相应地,第一复主成分变为:

$$T_1(1)=[u_{11}XR_1(1)+u_{21}XR_1(2)]+i[v_{11}XR_1(1)+v_{21}XR_1(2)]$$

$$T_1(2)=[u_{12}XR_1(1)+u_{22}XR_1(2)]+i[v_{12}XR_1(1)+v_{22}XR_1(2)]$$

显然,与 $\delta\neq0.0$ 的情况相比,$\lambda_1$ 和 $\lambda_1-\lambda_2$ 均变小。这就意味着第一模态的方差贡献变小,第一模态和第二模态的可区分性变小。根据 North 等[6](1982)的研究,第一模态和第二模态趋于不可分辨,第一复主成分的实部和虚部分别只依赖于 $u$ 和 $v$。因此,$\delta$ 有重要的统计意义。

### 2.2　复 Hermite 矩阵解的物理意义

实际上,复经验正交分析方法本身只是把二维矢量分解为一系列正交变量,其中第一模态有最大的方差贡献或能量,其大小由 $\lambda_1$ 表示。总方差或总能量为 $\sum_{k=1}^{P}\lambda_k$,$P$ 是空间格点数。

对于上述讨论的例子,我们有:

$$\lambda_1+\lambda_2=\alpha+\beta=(u_{11}^2+v_{11}^2+u_{12}^2+v_{12}^2+u_{21}^2+v_{21}^2+u_{22}^2+v_{22}^2)/2$$

它反映了总的能量,严格地说为总的异常能量。

对于第一复特征向量(两个空间点)$X_1=\begin{bmatrix}X_1(1)\\X_2(2)\end{bmatrix}$,我们已经有:

$$X_1(1)=1+i0$$

$$X_1(2)=\frac{\lambda_1-\alpha}{(\gamma+i\delta)}=\frac{(\lambda_1-\alpha)\gamma}{(\gamma^2+\delta^2)}-i\frac{(\lambda_1-\alpha)\delta}{(\gamma^2+\delta^2)}=XR_1(2)+iXI_1(2)$$

由于 $XR_1(2)$ 和 $XI_1(2)$ 是无量纲量,故 $X_1(2)$ 以及其实部和虚部均没有明显的物理意义,因此,复 Hermite 矩阵解的特征向量没有明确的物理意义。第一复主成分($T_1(1)$,$T_1(2)$)是一个有量纲的量,如同 $u$ 或 $v$(单位是 m/s)。这样,第一复主成分的

实部和虚部均有清晰的物理意义，它描述了特定风场随时间的变化。它的实部和虚部是所有的 $u$ 和 $v$ 以不同"权重"系数的和，这些"权重"系数具有统计意义。

## 3 结语

由于复主成分的实部和虚部是有关系的，因此我们不能用多元回归分析方法去研究异常风场变化，这是因为在多元回归分析方法中，要求多个因子之间是严格互相独立的，所以对复主成分的实部和虚部分别进行线性回归分析。这就是武炳义等[1]（2006）在其文章中没有应用多元回归分析方法的原因，但是他们的研究没有清楚地说明这一点。

复经验正交分析方法在气象学和海洋学研究领域中有着广泛的应用，特别是它对二维矢量场的分析有着独特的效果，这是其他方法所不具备的。复经验正交分析方法的核心是求解复 Hermite 矩阵的特征值、复特征向量和复主成分。本文讨论了复 Hermite 矩阵的特征值、复特征向量以及复主成分的统计意义和物理意义。特征值反映了方差贡献或能量，复特征向量没有明确的物理学意义，只有统计学意义。复主成分有清晰的物理意义，并且其实部和虚部是彼此有关系的。因此，在揭示二维流场变化的优势模态的研究中，只能用一维线性回归分析方法，即分别对复主成分的实部和虚部进行线性回归分析。

## 参考文献


[1] Wu B, Zhang R, D'Arrigo R, et al. Distinct modes of the East Asian winter monsoon [J]. Mon. Wea. Rev., 2006, 134:2165－2179.

[2] Kaihatu J M, Handler R A, Marmorino G O, et al. Empirical orthogonal function analysis of ocean surface current using complex and real-vector methods [J]. Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, 1998, 15: 927－941.

[3] Barnett T P. Interaction of the monsoon and Pacific trade wind system at interannual time scales. Part I: the eguatorial zone [J]. Mon. Wea. Rev., 1983, 111:756－773.

[4] 彭茹，武炳义. 1982/1983 年季风准双周振荡的位相传播及地理特征[J]. 应用气象学报，1995，6(2): 206－212.

[5] Kundu P K, Allen J S. Some three-dimensional characteristics of low-frequency current fluctuations near the Oregon coast. [J]. J. Phys. Oceanogr., 1976, 6:181－199.

[6] North G R, Bell T L, Cahalan R F, et al. Sampling errors in the estimation of EOFs [J]. Mon. Wea. Rev., 1982, 110: 699－706.


# Statistical and Physical Significances of Resolution of Complex Hermite Matrix in Climate Change Studies


Peng Ru　Zhang Xiaoqun

(CMA Training Center, Beijing 100081)



**Abstract:** The complex Empirical Orthogonal Function (CEOF) analysis has been extensively used in the meteorological and oceanic fields, and the key part of this method is to extract eigenvalues, eigenvectors, and complex principal components from a Hermite matrix. In previous studies, however, no one explores statistical and physical significances of the resolution of a Hermite Matrix. It is demonstrated that the eigenvalues of a complex Hermite Matrix represent variance contribution or anomalous energy, and eigenvectors have clear statistical significances and no apparent physical significances. In contrast, a complex principal component has a clear physical significance, and their real and imaginary parts are related to each other. Thus, the dimensional linear regression method can be used to extract predominant modes of vector variability.



**Key words:** complex empirical orthogonal function, complex Hermite matrix, climate change