

# 气象探空火箭测风不确定度评估方法

孙宇<sup>1</sup> 陈书驰<sup>2</sup> 邵胜利<sup>1</sup> 蔡俊武<sup>1</sup> 何亿强<sup>1</sup> 王芳栋<sup>1</sup> 史荟燕<sup>1</sup>

(1 北京航天飞行控制中心,北京 100094; 2 中国人民解放军 32021 部队,北京 100094)

**摘要** 本文在气象火箭测风反演数学模型基础上,通过误差分析理论和曲线拟合最小二乘原理,对大气风场反演结果不确定度的评估方法进行了研究。根据火箭探空仪在空中的运动规律,首先建立数学反演模型,推导得到风速和风向的计算公式;然后根据误差理论,推导出反演风速和风向的不确定度表达式;基于多项式拟合方法,进一步推导出拟合后的风速和风向的系统误差和随机误差公式,并求解公式中系数。最后以 1 次气象火箭实测数据为例,对风场及其不确定度进行了分析计算。结果表明:风速反演不确定度随高度降低而减小,在 50~60 km 高度不确定度约为 2.8~3.5 m/s,50 km 以下不确定度在 1 m/s 以内;风向在正北方向(0°)附近摆动时,会导致反演不确定度异常增大,其他高度不确定度基本在 10°以内。

**关键词** 气象探空火箭;测风;数据处理;不确定度评估

**中图分类号:** P412.6 **DOI:** 10.19517/j.1671-6345.20200196 **文献标识码:** A

## 引言

临近空间气象火箭探空测风模式为探空仪与火箭在上升段分离后,继续惯性运动到顶点,在下落过程中,降落伞逐渐张开,达到稳定状态后,在探空仪牵引下下落并随风飘移,降落伞成为高空风场的示踪物。根据探空仪记录的位置变化,可以反演得到临近空间 20~60 km 大气风场<sup>[1-7]</sup>。由此可知,相比于激光雷达或无线电雷达等遥感探测设备,火箭探空仪测风属于原位测量,其精度较高,对于工程应用和比对试验具有重要意义<sup>[8-9]</sup>。

气象火箭测风资料处理与常规气球探空不同。在 50~60 km 高度,由于空气密度很低,对降落伞—探空仪系统的拖拽力较小,根据降落伞位置信息算出的水平运动速度并不等于该高度空气块的水平移动速度,因此要对降落伞—探空仪系统的水平运动速度进行修正,从而得到该高度空气块的水平运动速度(即该高度上的水平风速)。由于风速修正公式中要用到降落伞—探空仪系统的移动速度和加速度,因此如何从所测的降落伞空间位置坐标计算获得这些速度和加速度?其误差是多少,以及因此导致风场反演结果的不确定度如何评估?这就是本

文主要研究的问题。

## 1 风场反演数学模型

根据牛顿第二定律且忽略浮力和科氏力的影响,将降落伞—探空仪系统作为 1 个质点,建立平衡方程如下:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} + \frac{1}{2} \rho C_d A |v_r| \vec{v}_r \quad (1)$$

式中,  $m$  为降落伞—探空仪系统的质量;  $\vec{v}$  为降落伞—探空仪系统相对于大地坐标系的运动速度矢量;  $\vec{g}$  为重力加速度矢量;  $\rho$  为大气密度;  $C_d$  为降落伞—探空仪系统的截面阻力系数;  $A$  为降落伞—探空仪系统的有效截面积;  $\vec{v}_r$ 、 $v_r$  为降落伞—探空仪系统相对于风的速度矢量和标量。

将式(1)改写为三维分量表达式:

$$\begin{cases} ma_x = mg_x - \frac{1}{2} \rho C_d A |v_r| (v_x - V_x) \\ ma_y = mg_y - \frac{1}{2} \rho C_d A |v_r| (v_y - V_y) \\ ma_z = mg_z - \frac{1}{2} \rho C_d A |v_r| (v_z - V_z) \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $a_x$ 、 $a_y$ 、 $a_z$  为降落伞—探空仪系统运动加速度的三维分量;  $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_z$  为降落伞—探空仪系统运动速度

的三维分量;  $V_x, V_y$  为风速的南北、东西分量;  $V_z$  为垂直气流速度;  $g_x, g_y, g_z$  为重力加速度的三维分量。

由于重力加速度在  $X, Y$  方向上的分量很小,故忽略  $g_x, g_y$ , 令  $g_z = g$ ; 通常情况下垂直气流速度  $V_z$  远小于降落伞-探空仪系统的落速, 即  $v_z - V_z \approx v_z$ 。于是式(2)可简化为:

$$\begin{cases} V_x = v_x - \frac{a_x}{a_z - g} v_z \\ V_y = v_y - \frac{a_y}{a_z - g} v_z \end{cases} \quad (3)$$

式(3)即为世界气象组织推荐的风速修正公式。

风向  $G$  可由下式表达(具体方向由  $V_x, V_y$  的正负号确定):

$$G = \frac{180^\circ}{\pi} \arctan \frac{V_y}{V_x} \quad (4)$$

## 2 风场反演不确定度

根据误差理论<sup>[10]</sup>, 若间接测量量  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 则系统误差  $\Delta y$  有如下近似表达式:

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \quad (5)$$

$$\begin{cases} \Delta V_x = \Delta v_x - \frac{v_z}{a_z - g} \Delta a_x - \frac{a_x}{a_z - g} \Delta v_z + \frac{a_x v_z}{(a_z - g)^2} \Delta a_z \\ \Delta V_y = \Delta v_y - \frac{v_z}{a_z - g} \Delta a_y - \frac{a_y}{a_z - g} \Delta v_z + \frac{a_y v_z}{(a_z - g)^2} \Delta a_z \end{cases} \quad (9)$$

由式(6), 可得风速随机误差表达式如下:

$$\begin{cases} \sigma_{V_x}^2 = \sigma_{v_x}^2 + \left( \frac{v_z}{a_z - g} \sigma_{a_x} \right)^2 + \left( \frac{a_x}{a_z - g} \sigma_{v_z} \right)^2 + \left[ \frac{a_x v_z}{(a_z - g)^2} \sigma_{a_z} \right]^2 \\ \sigma_{V_y}^2 = \sigma_{v_y}^2 + \left( \frac{v_z}{a_z - g} \sigma_{a_y} \right)^2 + \left( \frac{a_y}{a_z - g} \sigma_{v_z} \right)^2 + \left[ \frac{a_y v_z}{(a_z - g)^2} \sigma_{a_z} \right]^2 \end{cases} \quad (10)$$

随机误差与系统误差合成采用方和根法。风速误差在  $X, Y$  方向上的分量为:

$$\begin{cases} \Delta V_{x\text{总}} = \sqrt{\sigma_{V_x}^2 + \Delta V_x^2} \\ \Delta V_{y\text{总}} = \sqrt{\sigma_{V_y}^2 + \Delta V_y^2} \end{cases} \quad (11)$$

由误差合成原理可得风速误差为:

$$\Delta V = \sqrt{\Delta^2 V_{x\text{总}} + \Delta^2 V_{y\text{总}}} \quad (12)$$

### 2.2 风向误差

根据误差理论, 由式(4), 可得风向误差表达式为:

$$\Delta G = \frac{180^\circ}{\pi} \sqrt{\left( \frac{V_y \Delta V_{x\text{总}}}{V_x^2 + V_y^2} \right)^2 + \left( \frac{V_x \Delta V_{y\text{总}}}{V_x^2 + V_y^2} \right)^2} \quad (13)$$

式中,  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  为各变量的系统误差;  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  为误差传递系数。

随机误差是用表征其取值分散程度的标准差来评定的, 对于函数  $y$  的随机误差, 可用函数的标准差来评定。若各测量值的随机误差相互独立, 则随机误差  $\sigma_y$  表达式如下:

$$\sigma_y = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_{x_n}^2} \quad (6)$$

式中,  $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \dots, \sigma_{x_n}$  为各变量的随机误差。

误差合成采用方和根合成法, 则测量结果的总标准差  $\Delta_{\text{总}}$  为:

$$\Delta_{\text{总}} = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\sigma_y)^2} \quad (7)$$

风场反演不确定度评估采用 A 类评定法, 其标准不确定度  $u_c$  等同于由一系列观测值获得的标准差  $\Delta_{\text{总}}$ , 即  $u = \Delta_{\text{总}}$ , 测量结果不确定度  $Y$  表达式为:

$$Y = y \pm u_c \quad (8)$$

### 2.1 风速误差

根据误差理论, 由式(3), 可得风速系统误差表达式如下:

在实际数据处理时, 由于速度和加速度分量是对离散位置拟合后获得的, 因此速度和加速度分量系统误差和随机误差需由拟合过程得出。下面通过推导得到采用最小二乘法进行多项式拟合的风场系统误差和随机误差表达式。

## 3 最小二乘法多项式拟合的系统误差和随机误差

### 3.1 速度拟合的系统误差

设探空仪的在下落过程中的真实位置可以通过一个  $k$  次多项式给出:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k \quad (14)$$

实际数据处理中, 通过对离散数据点进行滑动

拟合,求一阶导数获得速度。取拟合数据点数为  $N$  (奇数),  $t_0$  为平滑间隔中间点  $\left(\frac{N+1}{2}\right)$  的时间。如果给出的拟合位置段系数建立在  $t_0$  为坐标系原点的基础上,那么就有  $t_0 = 0, t$  和  $i = 1, 2, \dots, N$  的数据点编号之间的关系是  $t = t_0 - \left(\frac{N+1}{2}\right)\Delta t + i\Delta t$ 。

如果采用最小二乘法拟合  $k$  次多项式,那么平滑后间隔中间点  $\left(\frac{N+1}{2}\right)$  的导数可利用正交多项式来表示:

$$v_x\left(\frac{N+1}{2}\right) = A_1 P_1'\left(\frac{N+1}{2}\right) + A_2 P_2'\left(\frac{N+1}{2}\right) + \dots + A_k P_k'\left(\frac{N+1}{2}\right) \quad (15)$$

式中,  $P_k(i)$  为正交多项式的  $k$  次项;  $P_k'(i)$  为关于  $P_k(i)$  中对  $i$  的一阶导数;  $\Delta t$  为数据点之间的时间间隔;  $N$  为用于拟合的数据点个数;  $k$  为拟合多项式次数。

根据正交多项式性质可得:

$$\begin{cases} A_k = \frac{\sum_{i=1}^k P_k(i)x(i)}{\Delta t \sum_{i=1}^k P_k^2(i)} \\ P_0(i) = 1 \\ P_1(i) = (i - \alpha_1)P_0(i) \\ P_{k+1}(i) = (i - \alpha_{k+1})P_k(i) - \beta_{k+1}P_{k-1}(i) \end{cases} \quad (16)$$

其中,

$$\begin{cases} \alpha_{k+1} = \frac{(iP_k, P_k)}{(P_{k-1}, P_{k-1})} = \frac{\sum_{i=1}^k iP_k^2(i)}{\sum_{i=1}^k P_k^2(i)} = \frac{N+1}{2} \\ \beta_{k+1} = \frac{(P_k, P_k)}{(P_{k-1}, P_{k-1})} = \frac{\sum_{i=1}^k P_{k-1}^2(i)}{\sum_{i=1}^k P_{k-2}^2(i)} = \frac{k^2(N^2 - k^2)}{4(4k^2 - 1)} \end{cases} \quad (17)$$

下面对最小二乘法进行 1~4 次多项式拟合的系统误差公式进行推导。

### 3.1.1 线性拟合

线性拟合条件下,拟合段中点的速度表达式为:

$$v_x\left(\frac{N+1}{2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^k P_1(i)x(i)}{\Delta t \sum_{i=1}^k P_1^2(i)} P_1'\left(\frac{N+1}{2}\right) \quad (18)$$

用式(14)代换为:

$$v_x\left(\frac{N+1}{2}\right) = \frac{P_1'\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Delta t \sum_{i=1}^k P_1^2(i)} \left[ a_0 \sum_{i=1}^k a_1 \sum_{i=1}^k P_1(i)t + \dots + a_k \sum_{i=1}^k P_1(i)t^k \right] \quad (19)$$

式中,  $x(i)$  为真实时间点  $t$ ;  $P_1(i) = i - \frac{N+1}{2}$ ;  $P_1' = 1$ 。

由于  $t = t_0 - \left(\frac{N+1}{2}\right)\Delta t + i\Delta t$ , 可写为  $t = t_0 + P_1(i)\Delta t$ 。代入式(19)可得:

$$v_x\left(\frac{N+1}{2}\right) = \frac{\left\{a_0 \sum_{i=1}^k P_1(i) + a_1 \sum_{i=1}^k P_1(i)[t_0 + P_1(i)\Delta t] + \dots + a_k \sum_{i=1}^k P_k(i)[t_0 + P_1(i)\Delta t]^k\right\}}{\Delta t \sum_{i=1}^k P_1^2(i)} \quad (20)$$

式(20)中大括号中的项可利用正交多项式的恒等式特点求解:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k P_1(i) = 0 \\ \sum_{i=1}^k P_1^4(i) = \frac{3N^2-7}{20} \sum_{i=1}^k P_1^2(i) \\ \sum_{i=1}^k P_1^3(i) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

将式(21)代入式(20)可得:

$$v_x\left(\frac{N+1}{2}\right) = a_1 + 2a_2 t_0 + 3a_3 t_0^2 + a_3 \Delta t^2 \left(\frac{3N^2-7}{20}\right) + 4a_4 t_0^3 + 4a_4 t_0 \Delta t^2 \left(\frac{3N^2-7}{20}\right) + \dots \quad (22)$$

由式(14),拟合段的中点速度可表示为:

$$v_x(t_0) = a_1 + 2a_2 t_0 + 3a_3 t_0^2 + 4a_4 t_0^3 + \dots \quad (23)$$

因此,对于线性拟合而言,速度的系统误差(实际速度和拟合速度之间的差(式(22) - 式(23)))如下:

$$\Delta v_x = a_3 \Delta t^2 \left(\frac{3N^2-7}{20}\right) + 4a_4 t_0 \Delta t^2 \left(\frac{3N^2-7}{20}\right) + \dots \quad (24)$$

由于系数  $a_0, a_1 \dots$  是与  $t_0 = 0$  的坐标相联系,则式(24)可简化为:

$$\Delta v_x = a_3 \Delta t^2 \left(\frac{3N^2-7}{20}\right) + a_5 \text{项} + a_7 \text{项} + \dots \quad (25)$$

### 3.1.2 三次多项式拟合

与线性拟合推导方法相同,同理可得到三次多项式速度拟合系统误差公式:

$$\Delta v_x = a_5 \text{项} + a_7 \text{项} + a_9 \text{项} + \dots \quad (26)$$

由式(25)、(26)可知,二次多项式拟合与线性拟合中点斜率相同(只有 3 次项系数以后的项),四次

多项式拟合与三次多项式拟合中点斜率相同(只有 5 次项系数以后的项)。因此,二次多项式拟合的速度系统误差与线性拟合相同,四次多项式拟合的速度系统误差与三次多项式拟合相同。

### 3.2 加速度拟合的系统误差

与速度拟合求系统误差推导方法相同,二次多项式拟合求二阶导数获取的加速度系统误差表达式为:

$$\Delta a_x = 2a_4 \Delta t^2 \left(\frac{3N^2-13}{14}\right) + 10a_5 t_0 \Delta t^2 \left(\frac{3N^2-13}{14}\right) + \dots \quad (27)$$

如果坐标的初始值  $t_0 = 0$ ,那么式(27)可简化为:

$$\Delta a_x = 2a_4 \Delta t^2 \left(\frac{3N^2-13}{14}\right) + a_6 \text{项} + a_8 \text{项} + \dots \quad (28)$$

四次拟合  $k$  次多项式求二阶导数的加速度系统误差推导方法与之类似,如果初始坐标系是  $t_0 = 0$ ,那么系统误差公式含有的项就只包括  $a_6$  项,  $a_8$  项……也就是说,二次多项式拟合求加速度时,其系统误差与  $k$  次多项式  $a_4$  项以后的偶数项相关;四次多项式拟合求加速度时,其系统误差与  $k$  次多项式  $a_6$  项以后的偶数项相关。

### 3.3 速度拟合的随机误差

设  $x(i)$  为在  $t = i$  时刻的观察数据点,  $\hat{x}(i)$  为在  $t = i$  时数据点的真值,  $\delta(i)$  为探测数据点的误差。则有:

$$x(i) = \hat{x}(i) + \delta(i) \quad (29)$$

在每个  $A_k$  中用  $\hat{x}(i) + \delta(i)$  代换  $x(i)$ ,代入式(15)可得:

$$v_x\left(\frac{N+1}{2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^k P_1(i)[\hat{x}(i) + \delta(i)]}{\Delta t \sum_{i=1}^k P_1^2(i)} P'_1\left(\frac{N+1}{2}\right) + \dots + \frac{\sum_{i=1}^k P_k[\hat{x}(i) + \delta(i)]}{\Delta t \sum_{i=1}^k P_k^2(i)} P'_k\left(\frac{N+1}{2}\right) \quad (30)$$

整理可得:

$$v_x\left(\frac{N+1}{2}\right) = \sum_{i=1}^k \left[ \frac{P_1(i)P'_1\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Delta t \sum_{i=1}^k P_1^2(i)} + \dots + \frac{P_k(i)P'_k\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Delta t \sum_{i=1}^k P_k^2(i)} \right] \hat{x}(i) + \sum_{i=1}^k \left[ \frac{P_1(i)P'_1\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Delta t \sum_{i=1}^k P_1^2(i)} + \dots + \frac{P_k(i)P'_k\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Delta t \sum_{i=1}^k P_k^2(i)} \right] \delta(i) \quad (31)$$

假设  $\delta(i)$  服从均值为零和方差为  $\sigma_x^2$  的正态分布, 那么当  $i \neq j$  时协方差  $COV[\delta(i), \delta(j)] = 0$ , 则可得  $v_x\left(\frac{N+1}{2}\right)$  的随机误差项为:

$$\sigma_{v_x}^2\left(\frac{N+1}{2}\right) = \sum_{i=1}^k \left[ \frac{P_1(i)P'_1\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Delta t \sum_{i=1}^k P_1^2(i)} + \dots + \frac{P_k(i)P'_k\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Delta t \sum_{i=1}^k P_k^2(i)} \right]^2 \sigma_x^2 \quad (32)$$

当  $j \neq k$  时, 依正交多项式性质, 有  $\sum_{i=1}^N P_j(i)P_k(i) = 0$ 。式(32)可简化为:

$$\sigma_{v_x}^2\left(\frac{N+1}{2}\right) = \left\{ \frac{\left[ P'_1\left(\frac{N+1}{2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_1^2(i)} + \dots + \frac{\left[ P'_k\left(\frac{N+1}{2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_k^2(i)} \right\} \frac{\sigma_x^2}{\Delta t^2} \quad (33)$$

当  $k$  为偶数时, 有:  $P'_k\left(\frac{N+1}{2}\right) = 0$ ,

因此, 式(33)进一步简化为:

$$\sigma_{v_x}^2\left(\frac{N+1}{2}\right) = \left\{ \frac{\left[ P'_1\left(\frac{N+1}{2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_1^2(i)} + \frac{\left[ P'_3\left(\frac{N+1}{2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_3^2(i)} + \frac{\left[ P'_5\left(\frac{N+1}{2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_5^2(i)} + \dots \right\} \frac{\sigma_x^2}{\Delta t^2} \quad (34)$$

从式(34)中误差的系数项可以看出, 二次多项式拟合与一次多项式拟合的速度随机误差相同, 四次多项式拟合与三次多项式拟合的速度随机误差

式(34)中右边括弧里的项可表示为  $N$  的函数, 由正交多项式递推公式和  $\beta_{k+1}$  联合求解可得:

$$\begin{cases} \frac{\left[ P'_1\left(\frac{N+1}{2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_1^2(i)} = \frac{12}{N(N^2-1)} \\ \frac{\left[ P'_3\left(\frac{N+1}{2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_3^2(i)} = \frac{7(3N^2-7)^2(N-4)!}{(N+3)!} \end{cases} \quad (35)$$

### 3.4 加速度拟合的随机误差

与速度拟合随机误差推导方法相同, 同理可得  $k$  次多项式拟合段中点加速度表达式:

$$\sigma_{a_x}^2\left(\frac{N+1}{2}\right) = \left\{ \frac{\left[ P''_2\left(\frac{N+1}{2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_2^2(i)} + \frac{\left[ P''_4\left(\frac{N+1}{2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_4^2(i)} + \dots \right\} \frac{\sigma_x^2}{\Delta t^4} \quad (36)$$

由式(36)中误差的系数项可以看出, 三次多项式拟合与二次多项式拟合的加速度随机误差相同,

五次多项式拟合与四次多项式拟合的加速度随机误差相同。

式(36)括弧内的前两项可表示为  $N$  的函数:

$$\begin{cases} \frac{\left[ P_2''\left(\frac{N+1}{2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_2^2(i)} = \frac{720}{N^5 - 5N^3 + 4N} \\ \frac{\left[ P_4''\left(\frac{N+1}{2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_4^2(i)} = \frac{44100(3N^2 - 13)^2}{49N(N^2 - 1)(N^6 - 29N^4 + 244N^2 - 576)} \end{cases} \quad (37)$$

通过以上推导,得到了速度和加速度 1~4 次多项式拟合的系统误差和随机误差公式。结论总结如下:①对于速度拟合而言,二次多项式拟合的速度系统误差、随机误差均与线性拟合相同;四次多项式拟合的速度系统误差、随机误差与三次多项式拟合相同。②对于加速度拟合而言,二次多项式拟合的速度系统误差、随机误差均与三次多项式拟合相同;四次多项式拟合的速度系统误差、随机误差与五次多项式拟合相同。

下面以 2004 年 11 月 16 日 11:59 在酒泉地区获取的 1 次探测数据为例,根据上述推导结论,计算风场系统误差、随机误差及其不确定度。

#### 4 个例分析

从实际探测获取的位移—时间曲线(图 1)看,位置滑动拟合时(滑动拟合点数根据分层高度选取),采用 3 次多项式即可,即:

$$f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \quad (38)$$

式中,  $f$  为纬向、经向和垂向分量。

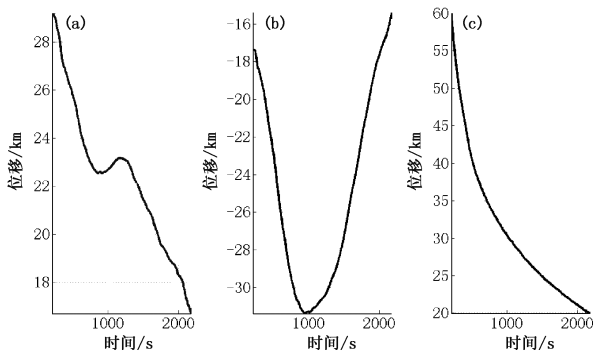


图 1 2004 年 11 月 16 日 11:59 酒泉探空实测位移—时间曲线:  
(a) 纬向, (b) 径向, (c) 垂向

#### 4.1 雷达跟踪定位误差

雷达跟踪体制应答定位探空仪位置在站心坐标系中坐标计算公式为:

$$\begin{cases} x = R_d \cos\alpha \cos\delta \\ y = R_d \cos\alpha \sin\delta \\ z = R_d \sin\alpha \\ z_h = z + h_0 \end{cases} \quad (39)$$

式中,  $x, y, z$  为探空仪位置点  $p$  在  $X, Y, Z$  轴上对应的坐标,单位:m;  $R_d$  为探空仪位置点  $p$  对应的雷达跟踪斜距,单位:m;  $\alpha$  为探空仪位置点  $p$  对应的雷达跟踪仰角,单位:rad;  $\delta$  为探空仪位置点  $p$  对应的雷达跟踪方位角,单位:rad;  $z_h$  为探空仪的海拔高度,单位:m;  $h_0$  为站心海拔高度,单位:m。

根据误差传递原理,雷达跟踪定位体制探空仪的定位误差为:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_R \cos\alpha \cos\delta - \sigma_\gamma R_d \sin(\alpha + \delta) \\ \sigma_y = \sigma_R \cos\alpha \sin\delta + \sigma_\gamma R_d \cos(\alpha + \delta) \\ \sigma_z = \sigma_R \sin\alpha + \sigma_\gamma R_d \cos\alpha \end{cases} \quad (40)$$

式中,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  为探空仪定位误差在站心坐标系  $X, Y, Z$  方向上的分量,单位:m;  $\sigma_R$  为雷达测距误差的标准差,单位:m;  $\sigma_\gamma$  为雷达测角误差的标准差,单位:rad。

采用常规高空气象 702D 雷达跟踪定位,其测距精度约为 20 m,测角精度约为  $0.1^\circ$ 。由式(40)计算可得探空仪位置分量的定位误差曲线(图 2)。可以看到,  $x$  方向(纬向)全程定位误差  $< 60$  m,  $y$  方向(经向)全程定位误差  $\leq 100$  m,  $z$  方向(垂向)全程定位误差  $\leq 80$  m。

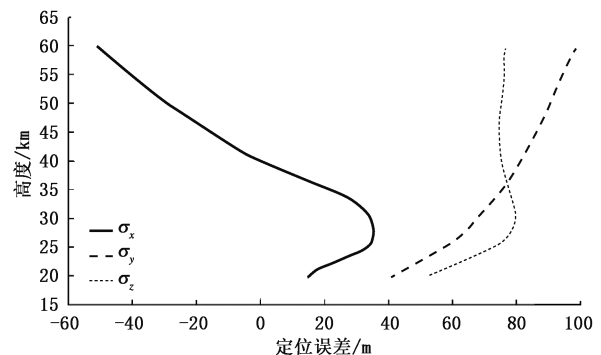


图 2 702D 气象雷达跟踪定位误差曲线

## 4.2 速度和加速度拟合

与常规高空气象探测气球匀速上升不同,火箭探空仪在下落过程中,落速逐渐减小,探测数据点分布呈上疏下密,因此需根据垂直分层要求,将探测高度每 10 km 间隔,划分为 50~60 km、40~50 km、30~40 km 和 20~30 km 4 个高度区间,采用最小二乘法逐点对离散位置数据  $(x(t), y(t), z(t))$  进行滑动拟合。首先对位置数据进行线性拟合,分别求一阶导数获得速度  $(v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ ; 然后对速度分量进行 2 次多项式拟合,求一阶导数获得加速度  $(a_x(t), a_y(t), a_z(t))$ 。

在不同高度区间拟合时,应考虑拟合点数的选择问题。主要考虑 3 个因素:①探空仪-降落伞系统的高空摆动影响。海拔高度 50 km 以上大气十分稀薄,空气分子的平均自由程大于伞衣织物孔径,伞衣呈现不透气状态,因而会出现大幅度的摆动。摆动具有随机性且无法被测量,所以在处理时需利用摆动偏差的对称性,通过抵偿方法来削弱其影响,摆动周期可由  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$  求得,其中  $L$  为摆长(可近似取伞绳长), $g$  为当地重力加速度;海拔高度 50 km 以下的区间,空气分子平均自由程逐渐小于伞衣织物孔径,伞衣通气量增大,降落伞的摆动效应迅速衰减,因此可忽略摆动影响。②高度分辨率的选择。拟合点数的多少代表着垂直分层的高度分辨率,拟合点数选择过大,易造成局部拐点被平滑掉,忽略风场细节变化。根据世界气象组织发布的《气象仪器和观测方法指南》<sup>[11]</sup>,高空风场的探测应至少满足:对流层 300~400 m,平流层及以上 600~800 m,边界层 50~150 m 的垂直分层要求。③拟合偏差的影响。根据前述拟合方程获取的误差表达式可知,传递误差随拟合点数增加而减小,而拟合偏差随拟合点数增加而增大。

根据实测数据分析(表 1),50~60 km 区间探空仪系统平均落速为 87.6 m/s,摆动周期约为 7 s,采用 7 点拟合(采样时间间隔  $\Delta t$  为 1.05 s),拟合高度分辨率约为 610 m;40~50 km 区间宜取 11 点平滑,拟合高度分辨率约为 570 m;30~40 km 区间宜取 21 点平滑,拟合高度分辨率约为 410 m;30 km 以下区间宜取 35 点平滑,拟合高度分辨率约为 275 m。根据对拟合误差的评估,通常采用线性、二次拟合平滑较为合适,即通过位置线性拟合求导获得速度,再对速度进行 2 次多项式拟合求导获得加速度。根据

雷达定位数据拟合后的速度分量见图 3。

表 1 2004 年 11 月 16 日 11:59 酒泉实测数据落速统计

高度区间 km	平均落速 m/s	拟合点数	拟合高度分辨率 m
50~60	87.6	7	约 610
40~50	51.9	11	约 570
30~40	19.5	21	约 410
20~30	8.7	35	约 275

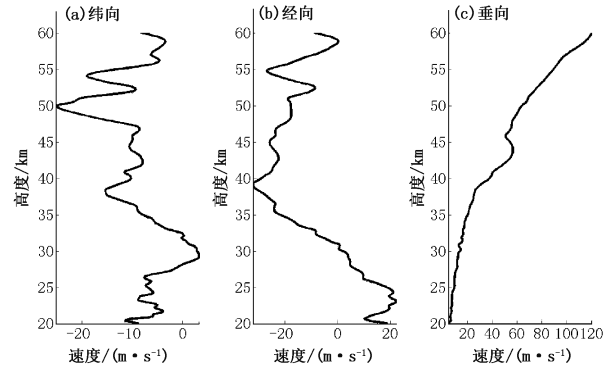


图 3 速度分量拟合曲线:(a)  $v_x$ , (b)  $v_y$ , (c)  $v_z$

## 4.3 拟合量系统误差和随机误差计算

速度采用线性拟合时,由式(25),其系统误差为:

$$\begin{cases} \Delta v_x = a_3 \Delta t^2 \left( \frac{3N^2 - 7}{20} \right) \\ \Delta v_y = b_3 \Delta t^2 \left( \frac{3N^2 - 7}{20} \right) \\ \Delta v_z = c_3 \Delta t^2 \left( \frac{3N^2 - 7}{20} \right) \end{cases} \quad (41)$$

由于位置多项式方程的 3 次项 ( $a_3, b_3, c_3$ ) 未知,采用三次多项式最小二乘拟合系数代替。位置分量拟合系统误差见图 4。可以看到,  $x$  方向(纬向)拟合系统误差基本在  $\pm 1$  m/s 以内;  $y$  方向(经

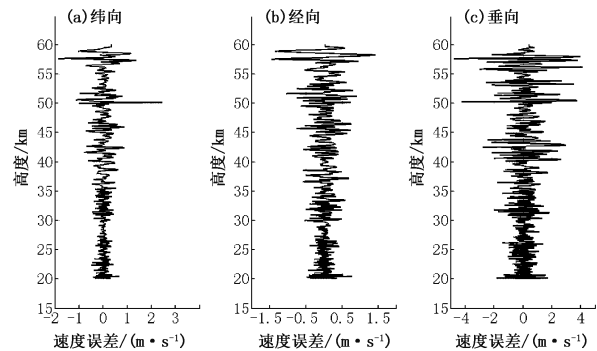


图 4 拟合的速度分量系统误差:(a)  $\Delta v_x$ , (b)  $\Delta v_y$ , (c)  $\Delta v_z$

向)拟合系统误差 50~60 km 基本在 ±1.5 m/s 以内,50 km 以下在 ±0.5 m/s 以内;*z* 方向(垂向)拟合系统误差 50~60 km 约在 ±4 m/s 以内,40~50 km 约在 ±2 m/s 以内,40 km 以下约在 ±1 m/s 以内。

加速度 2 次多项式拟合系统误差分量中含有  $a_4$  项、 $a_6$  项等,故加速度拟合系统误差为 0。

由式(34),速度分量随机误差为:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{v_x}^2 \left( \frac{N+1}{2} \right) &= \frac{\left[ P'_1 \left( \frac{N+1}{2} \right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_1^2(i)} \frac{\sigma_x^2}{\Delta t^2} = \frac{12}{N(N^2-1)} \frac{\sigma_x^2}{\Delta t^2} \\ \sigma_{v_y}^2 \left( \frac{N+1}{2} \right) &= \frac{\left[ P'_1 \left( \frac{N+1}{2} \right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_1^2(i)} \frac{\sigma_y^2}{\Delta t^2} = \frac{12}{N(N^2-1)} \frac{\sigma_y^2}{\Delta t^2} \\ \sigma_{v_z}^2 \left( \frac{N+1}{2} \right) &= \frac{\left[ P'_1 \left( \frac{N+1}{2} \right) \right]^2}{\sum_{i=1}^k P_1^2(i)} \frac{\sigma_z^2}{\Delta t^2} = \frac{12}{N(N^2-1)} \frac{\sigma_z^2}{\Delta t^2} \end{aligned} \right. \quad (42)$$

加速度分量随机误差为:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{a_x}^2 \left( \frac{N+1}{2} \right) &= \frac{12}{N(N^2-1)} \frac{\sigma_x^2}{\Delta t^2} \\ \sigma_{a_y}^2 \left( \frac{N+1}{2} \right) &= \frac{12}{N(N^2-1)} \frac{\sigma_y^2}{\Delta t^2} \\ \sigma_{a_z}^2 \left( \frac{N+1}{2} \right) &= \frac{12}{N(N^2-1)} \frac{\sigma_z^2}{\Delta t^2} \end{aligned} \right. \quad (43)$$

速度和加速度随机误差曲线如图 5、图 6 所示,图中速度和加速度误差存在阶跃变化的原因在于不同高度区间采取的拟合点数  $N$  不同。从图 5 可知, $x$  方向(纬向)速度拟合随机误差在 ±1 m/s 以内; $y$  方向(经向)速度拟合随机误差基本在 ±2 m/s 以内; $z$  方向(垂向)速度拟合随机误差在 ±1.5 m/s 以内。

速度拟合合成误差如图 7 所示, $x$  方向(纬向)为 ±1.7 m/s, $y$  方向(经向)为 ±3.3 m/s。

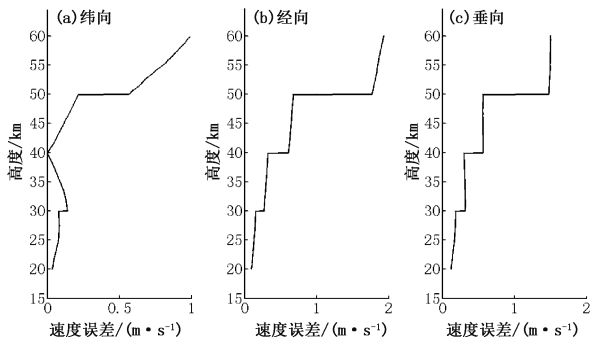


图 5 拟合的速度分量随机误差:(a) $\sigma_{v_x}$ , (b) $\sigma_{v_y}$ , (c) $\sigma_{v_z}$

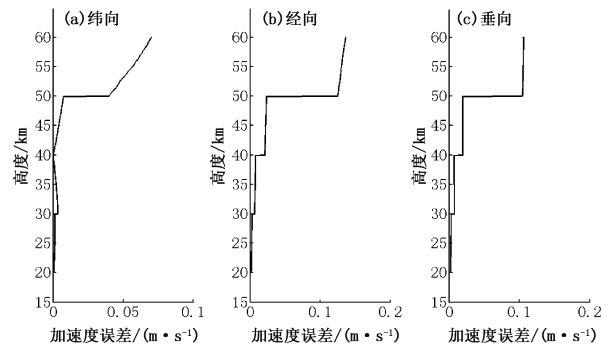


图 6 拟合的加速度分量随机误差:(a) $\sigma_{a_x}$ , (b) $\sigma_{a_y}$ , (c) $\sigma_{a_z}$

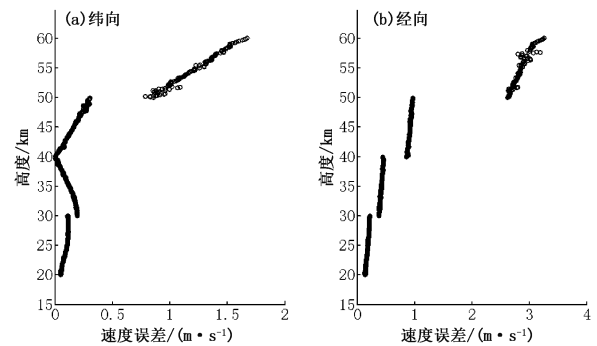


图 7 拟合的速度分量合成误差:(a) $V_{x_{总}}$ , (b) $V_{y_{总}}$

图 8 为修正后经纬向风速曲线,可以看到,在 50 km 以上经纬向风修正较大,50 km 以下修正较小。

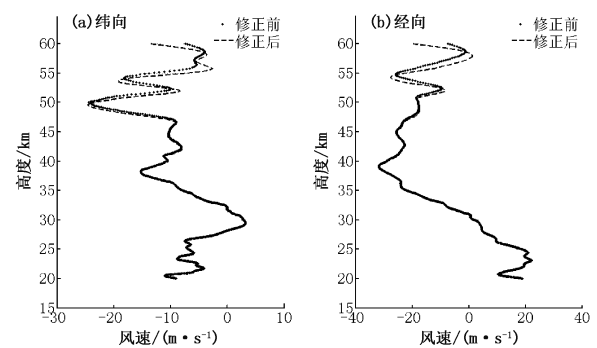


图 8 修正后经向风(a)和纬向风(b)风速随高度变化

图 9 为临近空间 20~60 km 风场反演结果及不确定度曲线。可以看到,风速不确定度随高度降低而减小。表 2、3、4 为风速和风向反演结果及不确定度。可以看到,50~60 km 为 2.8~3.5 m/s,50 km 以下在 1 m/s 以内。其中,在 58.3 km 高度风向不确定度异常增大到 44.9°,31 km 高度异常增



大到 18.1°,除风向 0°渐变段(56~59 km,30~32 km)外,其他高度时基本在 10°以内。

值得注意的是,风向在 0°附近摆动时(此时风速也接近于 0 m/s),会导致风向反演不确定度增大(图 9 框选部分)。

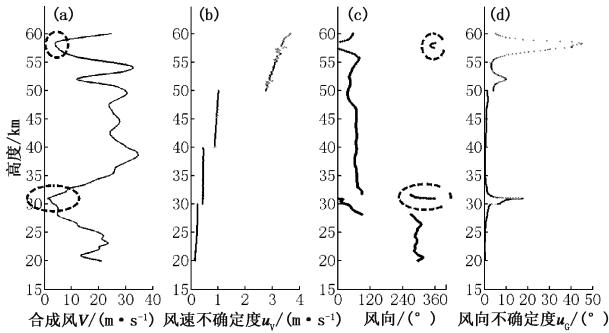


图 9 反演风场及不确定度:

(a)合成风风速,(b)风速不确定度,(c)风向,(d)风向不确定度

表 2 风场反演不确定度

高度/km	风速/(m·s <sup>-1</sup> )	风速不确定度/(m·s <sup>-1</sup> )
60	24.9	3.5
55	23.7	3.1
50	30.0	2.8
45	27.4	0.9
40	30.6	0.9
35	23.5	0.4
25	19.9	0.2
20	21.0	0.1

表 3 50~60 km 风向反演不确定度

高度/km	风向/(°)	风向不确定度/(°)
60.0	56	5.1
59.0	39	18.3
58.0	342	41.6
57.0	26	25.5
56.0	74	7.4
55.0	72	3.6
54.0	56	3.2
53.0	46	5.1
52.0	45	9.9
51.0	45	4.8
50.0	37	4.1

表 4 30~35 km 风向反演不确定度

高度/km	风向/(°)	风向不确定度/(°)
35.0	70	0.5
34.0	71	0.6
33.0	74	1.1
32.0	90	1.5
31.0	351	18.1
30.0	33	5.7

### 5 结论

气象探空火箭探测临近空间风场是建立在探空仪位置获取的基础上,其反演误差来自雷达定位误差和拟合误差。雷达定位误差与自身定位精度、实际探测时仰角和斜距相关。因此,风场反演不确定的评估是基于多项式拟合和定位误差的分析,本文通过对多项式最小二乘拟合的误差分析研究,分别推导给出了系统误差和随机误差公式。采用一次实测数据计算表明,风速反演不确定度随高度降低而减小,50~60 km 为 2.8~3.5 m/s,50 km 以下在 1 m/s 以内;风向在 0°附近摆动时(此时风速也接近于 0 m/s),会导致风向反演不确定度异常增大,在其他高度时风向反演不确定度基本在 10°以内。若采用更高精度的雷达,在高空大斜距条件下风场反演精度提升有限,而且会增加火箭探空仪结构设计的复杂性。若火箭探空仪采用导航卫星定位体制<sup>[12]</sup>,获取的探空仪位置和实时速度在精度上会有量级上的提高,则可以极大地提升风场反演精度。

### 参考文献

[1] Bollermann B. A study of 30km to 200km meteorological rocket sounding systems [R]. Washington: NASA Contractor Report,1970.

[2] Luers J K. A method of computing winds, density, temperature, pressure, and their associated errors from the high altitude Robin Sphere using an optimum filter [R]. Dayton: University of Dayton Research Institute,1970.

[3] Miers A. A data reduction technique for meteorological wind data above 30 kilometers [R]. New Mexico:White Sands Missile Range, 1968.

[4] Duchon E. Determination of winds from meteorological rocketsondes [R]. Texas:The University of Texas Austin, 1965.

[5] Holloway J L. Smoothing and filtering of time series and space fields [J]. In Advances in Geophysics, 1958, 1(4): 351-389.

- [6] Marvin K, Olsen R O. Improved technique for deriving wind profiles from rocketsonde parachutes [J]. Journal of Geophysical Research, 1967, 72(16): 4035-4040.
- [7] Miers B T, Beyers N J. Rocketsonde wind and temperature measurements between 30 and 70 km for selected stations [J]. Journal of Applied meteorology, 1963, 3(1): 16-26.
- [8] 陆龙骅,姚瑞新. 国外气象火箭探测近况[J]. 气象科技, 1974, 2(1): 30-38.
- [9] 美苏进行气象火箭现场发射比较[J]. 气象科技, 1978, 6(2): 4-4.
- [10] 费业泰. 误差理论与数据处理 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2010.
- [11] Guide to Meteorological Instruments and Methods of Observation [G]. World Meteorological Organization, 2010.
- [12] 赵世军,高太长,刘涛,等. 基于北斗一号的高空风探测方法研究[J]. 气象科技, 2012, 40(2): 170-174.

## Method for Evaluating Uncertainty of Wind Measurements for Meteorological Sounding Rocket

SUN Yu<sup>1</sup> CHEN Shuchi<sup>2</sup> SHAO Shengli<sup>1</sup> CAI Junwu<sup>1</sup> HE Yiqiang<sup>1</sup>  
WANG Fangdong<sup>1</sup> SHI Huiyan<sup>1</sup>

(1 Beijing Aerospace Control Center, Beijing 100094; 2 Unit 32021 of PLA, Beijing 100094)

**Abstract:** Based on the inversion model of wind measurement for meteorological rockets, the method for evaluating the uncertainty of wind inversion results is studied by the error theory and curve fitting least square principle. According to the motion law of the rocket sonde in the air, a mathematical model is established and the inversion function of wind speed and wind direction is derived. According to the error theory, the general expressions of the uncertainty of wind speed and wind direction are given. Based on the principle of polynomial least square fitting, the formulas of the systematic error and random error of wind speed and direction are derived, and the coefficients in the formulas are obtained. Taking the measured data as an example, the above formulas are used to analyze and calculate the atmospheric wind and the uncertainty. The results show that the uncertainty of wind speed decreases with the decrease of height. The uncertainty is 3.5 to 2.8 m/s in the 60 to 50 km, and less than 1 m/s below 50 km. When the wind direction is around the north ( $0^\circ$ ), the inversion uncertainty of wind direction will increase abnormally, and the inversion uncertainty is basically within  $10^\circ$  in the other cases.

**Keywords:** meteorological rocket; wind measurement; data processing; uncertainty evaluation